Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no. 2
oktober 1969

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. A. J. Th. Maassen, Bosboomstraat 20, Arnhem.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de penningmeester: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem(N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-32494.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786.

De wiskunde in de oudheid

Prof. Dr. H. J. A. DUPARC [1]
Delft

Het feit dat de organisatoren van deze vakantiecursus een lezing hebben geprojecteerd over de wiskunde in de oudheid zal ook thans nog weinig wiskundigen verbazen: in het kader van de historie der wiskunde nemen de prestaties der wiskundigen zo'n ruim twintig eeuwen geleden een belangrijke plaats in. Hoe in de komende decennia ook de accenten mogen liggen welke men bij het wiskunde-onderwijs op gymnasia, athenea of bij het HAVO meent te moeten leggen, het valt niet te ontkennen dat de eerste grote impulsen in de ontwikkeling der huidige mathesis in de oudheid lagen. Geheel anders ligt dit bij wetenschappen als natuur- en scheikunde, waar slechts een medelijdend lachje der tegenwoordige vakgenoten over de verrichtingen van toen, de jongheid dezer wetenschappen onderstreept. Al moge in de huidige tijd de wiskunde een wellicht even stormachtige ontwikkeling ondergaan als de natuur- en scheikunde, bij eerstgenoemde wetenschap is een terugblik op haar lange roemrijke historie boeiender en bovendien verschaft zo'n terugblik meer inzicht dan bij de jongere natuurwetenschappen.

Thans zou ik, zoals het een goed wiskundige betaamt, definities moeten geven van de begrippen oudheid en wiskunde aleer het verder toelaatbaar is een voordracht met deze vereiste titel te houden. Aannemende dat het begrip wiskunde de aanwezigen niet vreemd is (hoe verschillend zij er ook tegenover mogen staan) dien ik dus nog slechts het begrip oudheid vast te leggen. Zo ruwweg rekent men daartoe in onze contreien de periode die in de vierde eeuw na Christus met de grote volksverhuizingen eindigt en stilzwijgend betrekt men daarin slechts het gebeuren bij globaal de volkeren rond de Middellandse Zee. Wij willen dit gebruik maar volgen met voorbijgaan dan van interessante aspecten die in het (verre) Oosten landen als Japan, China en India in de bedoelde materie hebben gehad. Een rechtvaardiging van dit standpunt ligt wel daarin dat deze landen weinig hebben bijgedragen tot de westerse ontwikkeling der wiskunde, waarvan zij uiteindelijk de resultaten vrijwel volledig hebben overgenomen.

Het is gebruikelijk om bij beschouwingen over de klassieke wiskunde vast te

[1] Voordracht gehouden voor de vakantiecursus van het MC in augustus 1968.

stellen dat de praktijk het is geweest die grote impulsen heeft gegeven in de ontplooiing van dit vak en dat pas in latere instantie bij de Grieken de wiskunde van hulpmiddel voor praktische zaken tot een systeem, tot een wetenschap werd gemaakt, die men zelfs l'art pour l'art kan bedrijven. Het is trouwens dit dualisme in accent bij het bedrijven van wiskunde dat ook thans nog speelt en dat bij diverse instellingen van hoger onderwijs een duidelijk verschil in het wiskundeprogramma ten gevolge heeft.

Als uitgangspunt van onze beschouwingen zouden wij de elementen van Euclides kunnen nemen. Dit boek, volgens van der Waerden een der beste of misschien zelfs wel het beste wiskundeleerboek dat ooit is geschreven, is vrijwel geen enkele wiskundeleraar onbekend: immers tot voor zeer kort vormde het de basis voor ons meetkundeonderwijs. In hoeverre wij het niet meer precies volgen komt later ter sprake. Het moet ook als leerboek bedoeld zijn, tevens echter als een soort encyclopaedie, waarin alle toenmalige resultaten der wiskunde zijn samengevat. Die resultaten zijn van zeer verschillende herkomst en daardoor ook van uiteenlopend karakter. Het meest lijken op elkaar de gedeelten die de echte meetkunde behandelen. Gaan wij over het moeizame begin heen, iets waarin wij bij het VHMO Euclides graag navolgen, dan zien wij een systematische behandeling der meetkunde die slechts duidelijk in nevenproblematieken verzeild raakt zodra het getalbegrip (en met name dat van het reële getal) aan de orde komt. Het is algemeen bekend dat zo fraai als het gebouw der meetkunde bij de Grieken was ontwikkeld, zo ongelukkig het bij hen gesteld was met wat wij nu rekenen of algebra noemen. De bijzonder onpraktische notatie voor getallen was hieraan vooral schuldig. Men weet dit: ons positiestelsel voor het schrijven van getallen (ongeacht of wij het tientallige of het tweetallige op het oog hebben) is nog maar een aantal eeuwen gemeengoed. Onnoemelijk is de moeite die men zich in de oudheid moest getroosten reeds voor het invoeren van eenvoudige berekeningen, die wij tegenwoordig uit ons hoofd kunnen doen (zo wij dat nog willen en er geen rekentuig bij slepen). Een ander opzicht waarin het meetkundeonderwijs van nu geen nota neemt van de elementen van Euclides is de categorie problemen die – algebraïsch gesproken – voeren tot irreducibele vergelijkingen van de derde of van hogere graad. Op onze scholen nemen wij genoegen met die constructies die uitsluitend met passer en liniaal zijn uit te voeren, maar bij de Grieken ging men verder, al zal men het menigmaal hebben betreurd dat een bepaald probleem voor zijn oplossing aan passer en liniaal niet genoeg had.

Men denkt daarbij aan de beroemde problemen als de kwadratuur van de cirkel, de verdubbeling van de kubus en de trisectie van een hoek. Hoe groot is voor ons niet de verleiding om een algebraïsche analyse te maken en vast te stellen dat de uiteindelijke vergelijking die de oplossing bepaalt, niet via eerste- of tweedegraadsvergelijkingen met gehele coëfficiënten is te behandelen? Dat vaststellen heeft overigens ook zijn problemen gehad, want eerst bijna een eeuw geleden leerde het bewijs van de transcendentie van π dat de cirkelkwadratuur niet oplosbaar is, terwijl ongeveer anderhalve eeuw geleden de theorie

van Galois het laatste woord sprak over de twee andere genoemde problemen. Menigeen zal in zijn hart vinden dat deze problemen niet echt in de echte meetkunde thuis horen. Daarin worden slechts die vraagstukken toegelaten, waarvoor passer en liniaal, hoe ingenieus ook gebruikt, de oplossing(en) brengen. Het ware plezier voor de liefhebbers ligt vaak in het vinden van zo'n ingenieuze constructie na (heel) lang gepuzzel.

Misschien kan men wel zeggen dat ons tegenwoordige meetkundeonderwijs Euclides daar niet meer volgt, waar wij er eendimensionale analytische meetkunde van kunnen maken, dat is meetkunde waarbij elke rechte als getallenrechte (voor de reële getallen) kan optreden en verbanden tussen lengten nu met algebraformules worden geformuleerd en in de oudheid op zeer veel moeizamer wijze. In dit verband is het goed op te merken dat men toen onder hetgeen wij nu met a^2 aanduiden, inderdaad de oppervlakte van een vierkant met zijde a verstond (trouwens onze uitspraak van a^2 herinnert hier nog aan). Evenzo verstond men onder a^3 een inhoud (zoals de Engelse uitspraak van dit begrip nog kan onthullen). Men voelt dan al dat begrippen als a^4 in de oudheid reeds tot de oneigenlijke machten behoorden. En analoog was het gesteld met uitdrukkingen als *ab*, *abc*, waarbij ik dan iets van het type *abcd* voor de ouden een oneigenlijk produkt wil noemen. Een tegenstelling met ons is dat wij met wellust de leer van onze oneigenlijke machten behandelen, maar dat men in de oudheid nauwelijks naar de hunne taalde. Een ander punt was het ontbreken van de negatieve getallen. Problemen als het oplossen van een vergelijking $x^2 = ax+b$ of $x^2+ax = b$ (a en b positief) werden als verschillend beschouwd en dan ook op verschillende, zij het onderling verwante, wijze opgelost.

Overigens getuigen de elementen wel van een virtuositeit in het omgaan met de bij hen toelaatbare machten en produkten en daarmee behandelen van problemen. Persoonlijk ben ik dan altijd verbaasd dat men bij de behandeling van de regelmatige tienhoek wel de bekende relatie $a_5^2 = a_6^2+a_{10}^2$ afleidde, maar - voorzover ik weet - nimmer de betrekking $a_4^2 = a_6^2+a_6a_{10}+a_{10}^2$, waaruit blijkt dat in een driehoek met zijden a_4, a_6 en a_{10} een hoek van 120° voorkomt. Maar ja, ook op het gebied der klassieke meetkunde is in de laatste vijftien eeuwen nog wel iets gepresteerd in aanvulling op en in de stijl van de klassieke resultaten.

Na diverse kritische opmerkingen past nu toch zeker een woord van hulde voor de opbouw van de elementen, hulde misschien nog niet zozeer aan Euclides als wel aan de Griekse wiskundige wereld, waarin op streng logische wijze een van huis uit empirisch gerichte hulpwetenschap tot een deductief systeem werd verheven. Natuurlijk leent lang niet iedere wetenschap zich daartoe; het is de Grieken gelukt in te zien dat het met de wiskunde (meetkunde) mogelijk was en zij hebben het op voorbeeldige wijze gedaan. Daarmee is een stempel gedrukt op het uiteindelijke westerse denken, met name het zogenaamde exacte denken dat daarvan toch een der kenmerken is. Men zou bijna kunnen zeggen dat de Griekse taal er zich voor leende. Wie kent niet onze inleiding in veel (wiskundige) betogen: 'Er zijn twee gevallen mogelijk'. Een dergelijke casuïstiek

vindt men reeds in de Griekse woordjes $\mu\varepsilon\nu$ en $\delta\varepsilon$. Zodra men het woordje $\mu\varepsilon\nu$ ontmoet is men gewaarschuwd, het gaat om een alternatief, waarvan nu het eerste wordt behandeld en waarvan met feilloze zekerheid straks het tweede komt, ingeleid door $\delta\varepsilon$. In onze tegenwoordige taal is deze nuancering vaak wat afgezwakt; het woord 'of' onthult ons pas tussen de twee argumenten in dat er nog een tweede argument komt. Menig betoog wint aan helderheid als men de Grieken navolgt en – misschien door sommigen als wat overdreven aangevoeld – zijn betoog accentueert met de woordjes 'enerzijds – anderzijds' of 'weliswaar – maar' die beginners in het Grieks als de beste vertaling worden aangeprezen voor $\mu\varepsilon\nu$ en $\delta\varepsilon$.
Het is hier nauwelijks op zijn plaats om te releveren waar bij het begin (enerzijds) en het einde (anderzijds) van de elementen nog problemen liggen. De grenzen van een gebied zijn vaak nog interessanter dan het inwendige. De vraag dan naar grondslagen voor Euclides' meetkunde is een bekende. Bruins wees onlangs in een publikatie op enige aanduidingen in de Griekse tijd die wezen naar niet-euclidische meetkunde, de kritische doorbraak van dit besef vond echter pas in de vorige eeuw plaats en het heeft het hierover denkende deel der mensheid heel wat hoofdbrekens gekost om daartoe te komen. In dit verband is de onzinnige vraag op zijn plaats wie de elementen der meetkunde zou hebben geschreven als de elementen van Euclides ons niet hadden bereikt. (Het is immers genoegzaam bekend dat het opkomende westen het er ruim tien eeuwen zonder heeft moeten stellen en dat de echte bloei van de natuurwetenschappen pas na de heroriëntering op de Griekse cultuur, dus zeker de Griekse wiskunde, zo'n vier, vijf eeuwen geleden inzette.)
Genoeg thans over leermeester Euclides. Wie aan Griekse wiskunde denkt, noemt onmiddellijk ook namen als Pythagoras en Archimedes, om maar enkelen der grootsten te noemen. Het is maar al te bekend dat de stelling van Pythagoras – zo zij al van hem afkomstig is – geenszins de essentie van deze grote denker weergeeft. Op ethisch, godsdienstig terrein ontmoet men hem ook, zijn leer van het geluid en de harmonie der sferen, zijn opdracht tot veel stilte bij hem en zijn volgelingen staan wel in schril contrast tot onze tijd waar transistors in het klein en ultrasone vliegtuigen in het groot ons oor met een kakofonie der sferen belagen.

In Pythagoras' leer vindt men elementen van gedachten over de natuur, zoals die in omringende landen als Egypte, Voor-Azië en misschien zelfs Voor-Indië na een soms lange ontwikkeling waren ontstaan. Zoals Euclides de wiskunde in een systeem weergaf, zo was de leer van Pythagoras een synthese van zoveel meer humaniora. Zou de evenredigheid

$$\text{Pythagoras} : \text{Euclides} = \alpha : \beta$$

een voldoende typering in de structuur van hun prestaties geven, of wordt Pythagoras hiermede onrecht aangedaan door hem slechts als α en niet als $\alpha+\beta$ te typeren? Zijn leer der getallen vertoont stellig beide aspecten: de mathematische en mystieke. De aan hem toegeschreven stelling, die zelfs de

meest verwoede besnoeiingen van het meetkundeprogramma bij het VHMO overleeft, bracht merkwaardigerwijze ook een ontwikkeling van het begrip der irrationale getallen. Hoe moeizaam de Grieken ook met getallen werkten feilloos bewijst Euclides dat $\sqrt{2}$ niet rationaal is en dat bewijs gaat terug tot ver voor zijn tijd.

Wie aan irrationale getallen denkt en de Grieken niet is vergeten, noemt al gauw het getal π, ditmaal een afkorting van περιμετερ (omtrek), waarmee wij meteen op de figuur van Archimedes komen. Het is bekend dat hij met behulp van regelmatige veelhoeken op ingenieuze manier bewees dat π tussen $3\frac{1}{7}$ en $3\frac{10}{71}$ in ligt; het is ook bekend dat hij formules over oppervlakte resp. inhoud van cirkel, kegel, cilinder en bol heeft afgeleid. Zou hij het vanzelfsprekend gevonden hebben dat – om het in moderne terminologie te formuleren – al die uitkomsten, afgezien van juist één factor π, gehele rationale functies zijn van de lengten van bepaalde rechten, die deze figuren typeren? Het is aantrekkelijk om er over te filosoferen hoe Archimedes had gereageerd als hij de inhoudsformule voor een hypersfeer had gevonden. Trouwens als hij tot vierdimensionale prestaties in staat was geweest dan had hij wellicht niet de wetten van de opwaartse druk ontdekt, die immers bedoeld waren om de holle 'inhoud' van een hol gouden voorwerp te bepalen. Die had hij dan wel zo kunnen 'zien'.

De berekeningen van Archimedes vertonen zekere kiemen van onze latere integraalrekening, hij gebruikte vaak mechanische beschouwingen om de gewenste grootheden te vinden. Zou men Euclides' boek als de basis der wiskunde kunnen zien (althans dan dit deel van zijn elementen dat voor ons bewaard is gebleven), het werk van Archimedes reikt verder en vormt een basis voor de ontwikkeling der natuurwetenschappen. Waar die, zoals dat vrijwel onophoudelijk het geval is, wiskunde behoeft, toonde Archimedes zich een voortreffelijk wiskundig ingenieur die op waarlijk meesterlijke wijze de wiskunde ontwikkelde die hij voor zijn andere doeleinden nodig had.

Eerder stipten wij al aan dat de niet-algebraïsche structuur van het getal π pas veel later werd bewezen, zodat de kwadratuur van de cirkel met louter gebruik van passer en liniaal op de welbekende wijze bij de Grieken een open probleem bleef. Bekend zijn enerzijds de maantjes van Hyppokrates die ondanks hun gebogen begrenzing wel kwadreerbaar bleken, terwijl anderzijds Archimedes bewees dat er verwante figuren als het schoenmakersmes (ἀρβηλος) zijn, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gemakkelijk te construeren cirkel. Een interessant vraagpunt was het dan ook wanneer (dat is bij welk algemeen type figuren) kwadratuur wel en wanneer niet mogelijk is. De algebraïsche oplossing van de vorige eeuw had wellicht de Grieken noch geboeid noch bevredigd.

Met de enkele namen van klassieke mathematici die wij noemden, zijn wij er niet. Er waren velen die wiskunde bedreven en het valt niet moeilijk om nog heel wat verdere namen te noemen van personen die hun bijdragen tot de wiskunde hebben gegeven. Hoezeer de wiskunde in ere was, blijke uit de bekende woorden bij de ingang van Plato's academie μηδεις ἀγεωμητρικος

την ἐμην στεγην εἰσιτω, geen niet-wiskundigen worden toegelaten, een verbod dat bij onze huidige academies steeds minder van kracht is. Gymnasia zullen hier trouwens weldra exclusiever zijn dan academies; bij de Grieken was het waarlijk wel andersom.

Hier speelt natuurlijk de structuur der maatschappij een rol. Het is duidelijk dat de noden en wensen daarvan een stempel drukken op het denken, het doordenken, het verder denken en dus op de ontwikkeling der wetenschap. Hier is het het moment om stil te staan bij enkele andere volkeren dan bij de Grieken, volkeren overigens waar de wiskunde lang niet tot die bloei kwam, waartoe de Grieken haar konden brengen.

Bij de Egyptenaren waren landmeetkundige problemen, vaak van fiscale oorsprong, aanleiding tot oppervlakteberekeningen. Zij kwamen – onkritisch – tot foute formules die in heel wat gevallen niet te erg fout waren en dan een redelijke approximatie van het vereiste antwoord gaven. Trouwens ook tegenwoordig behelpt men zich in de toegepaste wiskunde vaak met approximaties, die veelal sneller een inzicht in het gezochte bedrag geven dan de soms bar ingewikkelde exacte formule. Het onderscheid met de Egyptenaren is dat zij zich niet, maar wij ons wel, bewust zijn van de gemaakte fout, die wij in staat zijn te schatten of waarvan wij desnoods weten (of aanvoelen . . .) dat anderen dat voor ons kunnen doen.

De Babyloniërs verdienen stellig enige aandacht. Hun rekentechniek, mede ontwikkeld ten behoeve van de beoefening van astronomie, moge in onze ogen verre van volmaakt lijken, zij wisten er voldoende raad mee en leven zelfs nog enigszins door bij ons: de verdeling van de hoek in graden, minuten en seconden herinnert aan hun zestigtallig talstelsel. Onvermijdelijk dwalen wij hier even af om er op te wijzen hoe in grijze tijden verschillende talstelsels tot ontwikkeling kwamen en hoe vaak de benamingen der telwoorden daarop wijzen. Hier ligt een uitgebreid terrein dat niet alleen betrekking heeft op de wiskunde in de oudheid, maar dat veel verder gaat. Dat het kunnen tellen wijst op een zekere mate van ontwikkeling, is duidelijk. Iemand die het niet kan mogen wij mathematisch gezien een analfabeet noemen, zeker als men beseft dat in het latere Griekse schrift de letters α, β, . . . voorzien van een bepaalde indicatie (een accent of een streep) gebruikt werden ter aanduiding van de cijfers. Het is overigens al een hele abstractie als men het getalbegrip als zodanig onderkent en niet, wat bij vele volkeren aanvankelijk het geval was, verschillende benamingen kende voor een getal al naar gelang van de objecten die men ermee telde. Zo kent men heden ten dage nog in het Japans verschillende telwoorden als zij worden gebezigd voor mensen, dieren, bepaalde goederen, enz. Trouwens ook in onze taal zijn er nog rudimenten van deze ontwikkeling: men denke bijvoorbeeld aan uitdrukkingen als een koppel paarden, een paar schoenen. Een ander interessant aspect bij de telwoorden vindt men naast het veelvuldig gebruik van het additieve weergeven van getallen (een *en* twintig; veer-tien) ook wel in het subtractieve.

In het Latijn ziet men dat in symbolen als IV of IX bij de Romeinse cijfers en

bij telwoorden als duo de viginti (18 = 20 − 2). Helaas is dit vrijwel het enige moment waarop een zinvolle vermelding van het Romeinse volk in dit betoog mogelijk is. Het blijft ook vrijwel hierbij: zo veel als de Grieken ons schonken, zo weinig droegen de Romeinen bij aan de ontwikkeling der wiskunde. Het mocht bij hen wellicht tot de bon ton behoren om Grieks te spreken (zei niet Caesar bij het overtrekken der Rubico: 'Ό *κυβος ερριφθω*"? – overigens het is en passant interessant op te merken dat het Griekse woord *κυβος* dobbelsteen betekent –), in wetenschappelijk oogpunt waren hun ontwikkelde slaven vaak verder dan de meester. Men kende toen geen slaven der wetenschap, hoogstens wetenschap der slaven, maar daarmee liet men zich niet in. In Germaanse talen zijn voorts telwoorden als elf en twaalf in andere zin subtractief: een-over ('left') resp. twee, na wegnemen van de tien. Het surplus bij de tien of tekort bij de twintig wijst op de speciale vormen van telwaarden tussen tien en twintig, pas daarna treedt een meer regelmatige koppelingsprocedure op om hogere getallen aan te duiden. Een en ander wijst op een reeds veelvuldig gebruik in grijze tijden van getallen tot twintig, een eerste verheffing boven de oertoestand van nauwelijks tot tien kunnen tellen. De rol die het getal twintig nog in het Frans speelt ondervindt menig scholier in zijn pogingen om het getal 98 correct op zijn Frans uit te spreken.
Naast de lage getallen verdienen de hoge onze aandacht. In zijn zandrekening komt Archimedes tot grote getallen (het aantal zandkorrels nodig om het heelal te vullen). Interessant is dat in het nieuw-Griekse cijferschrift een accent links onder een letter het duizendvoud aanduidt van een getal, aangeduid door een accent er rechts boven, dus $,\beta = 2000$; $\beta' = 2$. Na de duizend dus geen nieuwe symbolen meer, maar een herhaling in een of andere vorm van de bestaande. Verwant zijn onze benamingen voor de begrippen duizend, millioen, milliard, qua exponent van 10 dus om de drie een nieuwe naam. Bij de Japanners gebeurt dit pas om de vier; zij hebben een apart telwoord 'mang' voor tienduizend, waarvoor de Grieken iets dergelijks hebben in woord (*μυριοι*), maar niet in daad (,*ι*). Het is een boeiende bezigheid om allerlei verdere teleigenaardigheden bij diverse volkeren na te gaan; dat er rudimenten van andere talstelsels dan het tientallige naar voren komen is voor ons die zo heerlijk in het tweetallig stelsel zijn gaan denken terwille van het moderne rekentuig niet vreemd meer. Misschien is het wel jammer dat wij geen elf vingers hebben in plaats van tien; ook elftallen kunnen tot boeiende beschouwingen en berekeningen leiden.
Wij hielden ons tot nu toe – in het voetspoor van velen der ouden – slechts bezig met natuurlijke getallen. Het rekenen met rationale werd, vaak op omslachtige manier, in de oudheid reeds beoefend. De manier waarop de Egyptenaren hun getallen in stambreuken splitsten kan nu nog inspirerend werken op hen die rationale functies moeten interpreteren en daartoe tot breuksplitsing moeten overgaan. Negatieve getallen kwamen niet voor, de nul (*οὐδεν*, eerste letter *o*) trad nog wel eens op, maar niet als onderdeel van de schrijfwijze van een getal in het positiestelsel. Het wezenlijke gebruik van de zero, het cijfer bij uitstek (ook etymologisch zijn de woorden zero en cijfer

verwant), kwam pas via de Arabische wereld, vooral door invloeden uit Voor-Indië, tot ons. Zij zijn het ook die de Griekse wiskunde na het wegsterven in de eerste eeuwen onzer jaartelling tot ons brachten. Bekend is hoe Ptolemaeus' grote werk, de *μεγαλη συνταξις*, door hen verbasterd tot almagest, ons de vorderingen uit de Hellenistische tijd onthult en zelfs sinustafels bracht. Zoiets lag de Arabieren meer dan de meetkunde, tenslotte zijn zij het geweest die aan de geestelijke mathematische bagage uit de oudheid, met zijn zo sterke meetkundige grondslag, ons de algebra hebben geschonken. Al mogen wij tegenwoordig de moderne algebra (der twintigste eeuw) tegenover de klassieke stellen, die klassieke is geen produkt uit de oudheid en valt buiten het kader van dit betoog'

Een vraag nog tot slot kan men zich stellen. Heeft het nog zin zich bezig te houden met de wiskunde in de oudheid, vooral gezien in het licht van de moderne neiging tot abstractie in de wiskunde enerzijds en tot veelal cijfermatig gebruik van de wiskunde ten behoeve van andere vakken anderzijds? U weet al van te voren dat ik deze vraag bevestigend zal beantwoorden en dat ik meen weinig moeite te hebben om er argumenten voor te vinden. Allereerst heeft elke bezinning op het verleden, dus ook die op de historie van een bepaald vakgebied, zin; wie daaraan schamper wil voorbijgaan, maakt zich schuldig aan *ὕβρις*, in de Griekse tijd reeds een verachtelijke geesteshouding. Verder is het uiterst leerzaam om te zien waar men in het verleden grote problemen ontmoette en hoe men die in heel wat gevallen wist op te lossen. Zij wijzen ons vaak de weg voor de onze. Zeker is dat bij de wiskunde zo, waar het komen tot een deductief systeem ons door Euclides is getoond en ons voorbeeld is voor de opzet van nieuwe vakken, hoe abstract ook. En tenslotte is het leerzaam om te zien hoe reeds bij de ouden het systeem dienstbaar kon worden gemaakt voor het oplossen van problemen uit andere vakgebieden, een instinct waarom de huidige wereld schreeuwt.

Wat moet een econoom van de wiskunde weten?

Prof. Dr. J. S. CRAMER
Amsterdam

1 De hierboven weergegeven vraag is door de redactie van Euclides aan mij gesteld. Ik voel mij bijgevolg als een leerling die de beurt krijgt en voor het bord wordt geroepen. De leraar staat te wachten; van de soortgenoten in de klas zullen er (wie weet) een paar meeluisteren; vroeger of later moet er een antwoord komen. Een gezaghebbende uitspraak is dat antwoord niet; daarvoor wende men zich tot een commissie, niet tot een persoon. Ik geef mijn eigen mening, en vestig er de aandacht op dat de klasse waaruit ik ben gekozen een rare opleiding achter de rug heeft: het is wel zeker dat van alle economen die meer of minder wiskunde kennen en gebruiken er geen twee hetzelfde antwoord zouden geven.

Dat dit laatste een kwestie van opleiding is ontleen ik aan een anecdote, natuurlijk uit Engeland. Daar werd bij een discussie over dezelfde vraag ter snede opgemerkt dat iedere spreker juist *die* wiskundige kennis noodzakelijk achtte *die hij zelf bezat*, niet meer en niet minder. Zoiets prikkelt tot tegenspraak, en daar mijn wiskundige kennis maar bescheiden is wil ik vooropstellen dat in het algemeen voor de beoefenaar van sociale wetenschappen, en voor de econoom in het bijzonder, *alle* wiskunde van nut is.

Dit geldt, ten eerste, omdat de wiskunde een krachtig hulpmiddel is voor analytisch en geordend denken over gecompliceerde samenhangen, en dat heeft men in de economie broodnodig. Over deze vormende betekenis van de wiskunde, die men ook anders kan formuleren, hoef ik in dit blad niet uit te weiden. Wèl wil ik er aan toevoegen dat ik in dit opzicht de mathematische statistiek zeker even hoog waardeer als de (andere) onderdelen van de wiskunde, die op de middelbare scholen gangbaar zijn. Begrip van het waarschijnlijkheidsmodel is even belangrijk, even *vruchtbaar*, als inzicht, vertrouwdheid met het functiebegrip of een stukje verzamelingenleer; het is ook even moeilijk te verkrijgen. Nu het statistiek-onderwijs wordt ingevoerd hoop ik dat het zal worden gebruikt om in de eerste plaats het kansbegrip bij te brengen.

2 Er is nog een tweede reden waarom men heel makkelijk kan stellen dat ten aanzien van de wiskunde voor de econoom geldt: hoe meer, hoe beter;

deze reden is dat de praktische of technische toepassingen van onderdelen van de wiskunde in de economie nog niet volledig kunnen worden voorzien. In de afgelopen decennia zijn er herhaaldelijk onverwacht nieuwe wiskundige technieken in de economie geïntroduceerd. Het gebruik van matrixalgebra is even overrompelend in de economie binnengekomen als in de fysica; het is nu niet meer weg te denken, maar dateert van slechts twintig, vijftien jaar geleden. Een ander voorbeeld is dat er onlangs voor het onderzoek van seizoenpatronen spectraalanalyse werd ingevoerd; deze techniek was (en is) de meeste mensen die op economisch gebied werkzaam zijn volslagen onbekend. Het kost niet veel moeite om andere, zij het minder spectaculaire, gevallen aan te geven van onderdelen van de wiskunde die pas kort geleden voor het eerst in de economie werden toegepast.

Tot dusverre gaat het hierbij in hoofdzaak om de introductie van bestaande, gereed liggende onderdelen van de wiskunde op een nieuw (economisch) probleem; het komt wel eens voor dat vanuit het economische vraagstuk een stuk wiskundige theorie ontstaat, zoals b.v. bij het lineair programmeren, maar dit is tot nu toe toch een uitzondering. Dat de snelle en onverwachte introductie van nieuwe onderdelen van de wiskunde nog steeds doorgaat is een teken dat de confrontatie van wiskunde en economie nog lang niet is voltooid. De thans in de economie ingeburgerde wiskunde is niet bewust geselecteerd, maar bepaald door wat deze of gene toevallig als mogelijkheden zag. Wat ons nog te wachten staat zal dan ook pas blijken als er een generatie van als wiskundige geschoolde economen aan het werk gaat. Aan de opleiding van deze groep wordt thans gewerkt; ik kom daar straks nog op terug. Zeker is dat er in de toekomst meer en andere wiskunde in de economie zal worden gebruikt dan thans het geval is. Vandaar dat het van belang is de toekomstig econoom met een denkwijze vertrouwd te maken, méér nog dan hem parate kennis bij te brengen.

Uit hetgeen hierboven over het 'overnemen' van wiskunde in de economie is gezegd volgt ook dat de huidige situatie mede door het voorheen door economen genoten onderwijs is bepaald. Kiest men die huidige situatie nu tot uitgangspunt dan dreigt het gevaar dat het oude programma van schoolwiskunde zichzelf reproduceert. Hier valt slechts aan te ontkomen als men niet bang is om bij wijze van spreken onderwerpen in het onderwijs op te nemen die hieronder niet worden genoemd, omdat ik van het bestaan nog niet eens afweet.

3 De voorgaande opmerkingen betekenen een belangrijk voorbehoud, maar zij zijn zo algemeen dat men er geen houvast aan heeft. Ik zal dus in het vervolg wat minder slagen om de arm houden en eenvoudig trachten aan te geven welke wiskundige kennis ten minste nodig is om op het ogenblik op behoorlijke wijze economie te kunnen studeren. Ik sluit mij dus aan bij de thans gangbare praktijk. Deze is dat aan alle economische faculteiten in het eerste studiejaar een wiskundige propedeuse wordt gegeven. Voor abituriënten met eindexamen B of β draagt deze cursus ten dele het karakter van het herhalen en opfrissen

van de schoolwiskunde, maar voor de studenten met eindexamen A on α is het een vrij krachtige correctie op de regel uit het Academisch Statuut dat ook zij tot de studie in de economie worden toegelaten.

Ten eerste heeft men een aantal stukken uit de analyse nodig. De economie houdt zich bij uitstek bezig met *relaties* tussen een groot aantal veranderlijke grootheden, en een behoorlijk inzicht in het functiebegrip is strikt nodig; dit geldt in het bijzonder voor functies van meer variabelen, impliciete en expliciete functies. Ook het geval van *meer* functies (in meer variabelen) en hun oplossing (simultane vergelijkingenstelsels) is van groot belang.

Heel veel economische vraagstukken dragen het karakter van *optimum-problemen*. De economie hanteert hiervoor vaak de z.g. marginale analyse, die te vergelijken is met de differentiaalrekening van een doe-het-zelver. Hoeveel makkelijker zou het zijn als iedereen de voorwaarden voor extrema van continue functies had geleerd! Dit betekent dus: bepaling van afgeleiden (ook hogere), graag voor functies van meer variabelen (dus partieel), en ook voor impliciete functies. Een bijzonder geval is Lagrange's methode voor het bepalen van een extremum met inachtneming van een of meer nevenrelaties. Dit wordt in de economie al vroeg als een heel gewone methode gehanteerd terwijl het in de wiskunde doorgaans niet tot de elementaire stof wordt gerekend en pas vrij laat in het studieprogramma voorkomt. Met 'iets' over homogene functies en het theorema van Euler alsmede een snuifje integraalrekening is dit het alleronderste minimum aan analyse dat een econoom behoort te kennen.
Hoge eisen aan de klassen van functies die hierbij worden behandeld hoeft men niet te stellen; het merendeel van de economische theorie werkt met niet nader gespecificeerde (continue, differentieerbare, eventueel homogene) functies f, g, ϕ enzovoorts; voor de oefeningen vervangt men deze door eenvoudige uitdrukkingen als polynomen. De enige transformatie die weer wèl grote belangstelling geniet is de overgang op logaritmen en exponenten, liefst met grondtal e. Partiële reactiecoëfficienten worden in de economie graag uitgedrukt als *elasticiteiten*, gedefinieerd als

$$\frac{\partial \log f(x),}{\partial \log x}$$

en ook bij de berekening van contante waarden nemen uitdrukkingen van de vorm

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) dt$$

een voorname plaats in.
Gaat men iets verder dan is enige bekendheid met de oplossing van (vrij eenvoudige) *differentiaalvergelijkingen* gewenst; een apart verlangen van de econoom is bovendien om daarnaast wat te weten van de in het gangbare wiskunde onderwijs (ook aan de Universiteiten) veel minder gebruikelijke *differentievergelijkingen*.

4 Al het bovenstaande betreft de heel algemene economische theorie. Gaat men verder en dieper dan is alles wat ik heb vermeld voor uitbreiding vatbaar. Daarnaast worden echter specifieke eisen gesteld aan de kennis van de wiskundige technieken die bij praktische toepassingen aan de orde komen. Om te beginnen is het nodig vertrouwd te zijn met symbolen (en bewerkingen!) als $\sum$ en $\prod$, correcte notatie van indices en hun grenzen en wat dies meer zij. Verder is al spoedig enige bekendheid met lineaire algebra gewenst.

De reden dat er zoveel met lineaire algebra wordt gewerkt is uiteraard dat economische systemen vaak zeer veel variabelen bevatten en dat hun relaties zonder al te veel bezwaar kunnen worden gelineariseerd. Uiteraard biedt dit ook een goede gelegenheid voor het onderzoek en de demonstratie van simultane vergelijkingen-stelsels. Hieruit volgt de wenselijkheid van kennis van vectoren en matrices, afhankelijkheid, oplossing van stelsels, matrixinversie. Aan karakteristieke vectoren en eigenwaarden komt de gewone econoom zelden toe.

Een geheel andere toepassing van lineaire algebra vindt men in de (lineaire) programmering. Het maximum-probleem wordt daar geformuleerd als de maximering van een doelfunctie in een groot aantal variabelen die aan een overvloedig aantal lineaire restricties in de vorm van *on*gelijkheden zijn onderworpen. De overeenkomstige halfvlakken begrenzen dus een convexe kegel waarvan men de 'top' moet bepalen, in het eenvoudigste geval voor een lineaire doelfunctie. De behandeling van dit probleem is wiskundig, de oplossing draagt echter vaak sterk het karakter van een algoritme.

5 Deze eigenschap van het lineaire programmeringsvraagstuk geeft aanleiding tot een onderscheid tussen de wiskunde die nodig is om de economische theorie te *begrijpen* en die welke gevraagd wordt om de economie ook *toe te passen*. In het laatste geval moet de student kunnen rekenen.

Deze eis doet kinderlijk aan. Helaas kan menig student die heel veel van matrixalgebra weet in de praktijk nog niet aangeven hoe een matrix van, zeg, de orde 4 zonder al te grote rekenfouten moet worden geïnverteerd. Ik geef toe dat 'we hiervoor computers hebben' en dat dit soort kunstgrepen maar het best in de harde praktijk kan worden aangeleerd. Enig begrip voor aritmetiek en het verstandig gebruik van rekentuig is echter wel op zijn plaats.

Elektronische rekenmachines dienen echter niet alleen voor het uitvoeren van grote berekeningen maar zij hebben ook grote betekenis voor informatieverwerking, voor de automatisering van de administratie en voor het uitvoeren van gecompliceerde regelsystemen. De econoom zal ze eerder in deze rol ontmoeten dan als rekenwonder, tenzij hij een typische researchtaak krijgt. Nu geldt voor vrijwel de hele opgroeiende generatie of zij nu econoom worden of niet dat zij veel met computers te maken zullen krijgen, en er wordt wel voor gepleit om hen daar reeds op school mee vertrouwd te maken.

Ik vraag mij af of dit onderwijs veel verder moet gaan dan enige algemene beginselen en of het niet méér een vorm van algemene ontwikkeling is dan van wiskunde. Als men namelijk verder wil gaan dan een algemene inleiding kan men moeilijk anders doen dan de scholieren te leren programmeren. De techniek van de machine is te moeilijk, te zeer ook aan verandering onderhevig, en de theorie van het programmeren – de programmatalen – lijkt mij te moeilijk. Maar programmeren is meer een eerlijk handwerk of gezelschapsspel dan een leervak, en ik betwijfel of het met vrucht in het onderwijs kan worden ingevoerd.

6 Het voorgaande behelst een minimumprogramma voor het volgen van het thans gangbare universitaire onderwijs in de economie. Geheel andere eisen stelt de opleiding voor de gespecialiseerde vakken zoals econometrie, mathematische statistische methoden op het gebied van de economie, wiskundige economie, operations research of besliskunde. Deze vakken zijn sterk wiskundig van aard, zij bereiden voor op researchfuncties (althans in hoofdzaak), en zij vragen een zeer grondige wiskundige scholing.

Er zijn voor deze opleiding thans overal in ons land afzonderlijke studierichtingen ingesteld, hetzij als onderdeel van de economische faculteit (Rotterdam, Tilburg), hetzij in een interfaculteit tussen de economie en de wiskunde in (Amsterdam G.U. en V.U. en Groningen). Het karakter van deze studies moge blijken uit het feit dat in Amsterdam voor het kandidaatsexamen econometrie praktisch dezelfde wiskunde-eisen worden gesteld als voor een kandidaats wiskunde (Wn). In de andere steden ligt het, afgezien van de gekozen organisatie, niet veel anders. Op deze opleiding is onze hoop gevestigd voor een definitieve doorwerking van de wiskunde in de economie (voorzover zoiets ooit definitief is). Voor het middelbaar onderwijs stelt deze studie dezelfde wiskunde-eisen als de studie in de natuurwetenschappen; zij vraagt aldus bepaald een zekere wiskundige begaafdheid. Het formele verschil dat men tot de Economische Faculteiten met alle eindexamens toegang heeft en dat voor de Interfaculteit een eindexamen B of β nodig is verandert daaraan weinig.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

De leesportefeuille
wordt niet langer verzorgd door de heer G. J. J. Boost te Roosendaal. Zijn taak is overgenomen door Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.
Leden van Wimecos, Liwenagel of de Wiskundewerkgroep van de WVO kunnen zich bij de heer Smeur aanmelden. De leeskosten bedragen ƒ2,00 per jaar per tijdschrift (bij één tijdschrift ƒ2,50). Men heeft keuze uit:
Praxis der Mathematik(12), Mathematica et Paedagogia(4), Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques(6), Elemente der Mathematik(6), Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht(10), The Mathematics Teacher(8), The Mathematical Gazette(5), Mathematische-Physikalische Semesterberichte, School Science and Mathematics, Paedagogische Studiën(12).

Tussen haakjes de verschijningsfrequentie per jaar.
Voor meer inlichtingen mogen we verwijzen naar Euclides, **43**, p. 233 of naar Dr. Smeur.

Kalender

ma 13 t/m za 18 oktober: Cursusconferentie Wiskobas te Egmond zie Euclides, sept., p. 33.

do 23 t/m za 25 oktober: Conferentie 'Onderwijs en verandering' Evert Kupersoord te Amersfoort; zie Euclides, sept. p. 34.

do 23 t/m za 25 oktober: Heroriënteringscursus Algebra en Analyse voor vwo-leraren, georganiseerd door de CMLW te Utrecht. (Inschrijving gesloten).

wo 29 oktober: MC (2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O) 20 uur: in de serie 'Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht' Mevr. Dr. A. B. Paalman-de Miranda. Het onderwerp is nog niet bekend.

wo 26 november: MC (serie als boven) 20 uur: Prof. Dr. L. C. A. Corsten over 'Terugkerende gebeurtenissen'.

ma 22 december: Jaarvergadering Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Utrecht in het Transitorium van de Uithof.

Korrel CLI

De verzameling $\{X|d(X, OA) = d(X, OB)\}$

In het eerste nummer van het nieuwe tijdschrift NICO, revue périodique du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, gaat Papy in op didactische problemen waarmee de wiskundeleraar wordt geconfronteerd, zodra hij de verzameling van de punten gaat onderzoeken, die gelijke afstanden hebben tot de benen van een hoek. Gaan we de Nederlandse schoolboeken na, dan blijkt dat ook hier de optredende problematiek nog niet steeds ten volle wordt onderkend.
De vraag is: *Welke is de verzameling van de punten die gelijke afstanden hebben tot de benen van een hoek?*
Zij AOB de hoek; de benen OA en OB noemen we opvolgend a en b.
Het is duidelijk, dat we, vóór we het probleem kunnen behandelen, zullen hebben vast te stellen, wat we verstaan onder de afstand van een punt tot een halve rechte: de benen van een hoek zijn immers halve rechten.

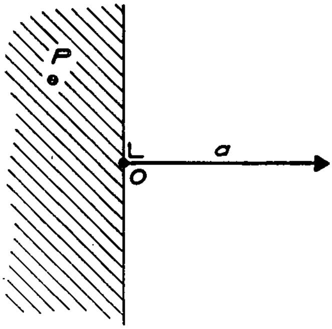
We beschouwen drie definities:

1 de afstand van een punt P tot een halve rechte a is de lengte van het lijnstuk PP', als P' de projectie is van P op a;

2 de afstand van een punt P tot een halve rechte a is de lengte van het lijnstuk PP', als P' de projectie is van P op de hele rechte waarvan a deel uitmaakt;

3 de afstand van een punt P tot een halve rechte is het minimum (onderste grens) van de afstanden van P tot de punten van a.

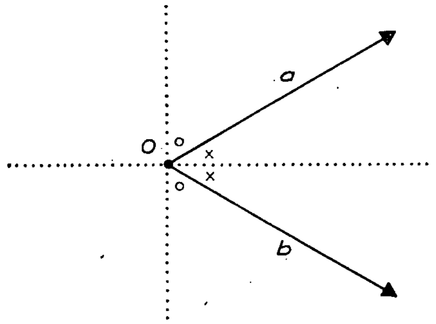
Tal van leerboeken onthouden zich van enige definitie. Het ligt voor de hand, dat leerlingen in dit geval intuïtief over zullen gaan tot definitie (1). Dit leidt echter tot onaangename consequenties.



FIGUUR 1

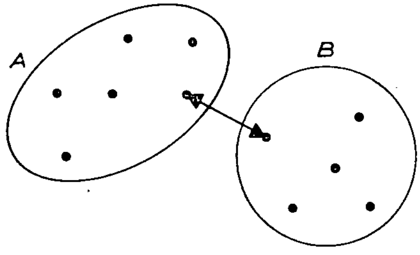
Er is nu namelijk een geheel halfvlak voor de punten waarvan het begrip afstand tot de halve rechte a zinloos wordt. Geen van de punten van het bedoelde halfvlak bezit een projectie op de halve rechte a. Zie fig. 1.

Beschouwen we nu bijvoorbeeld een vierhoek $ABCD$ waarin hoek D een inspringende hoek is. Het is nu niet meer waar, dat elk punt van de bissectrice van $\angle D$ op gelijke afstanden van de benen van hoek D ligt.
Definitie (2) verdient de voorkeur boven definitie (1). Maar nu is de consequentie, dat de bissectrice van $\angle AOB$ slechts een echte deelverzameling is van de verzameling der punten met gelijke afstanden tot de benen van de hoek.



FIGUUR 2

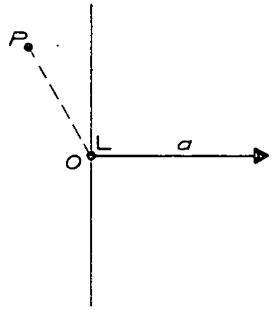
De gezochte verzameling bestaat nu uit de beide hele rechten die de hoeken gevormd door de hele rechten waarvan a en b deel uitmaken, middendoor delen. De hier gevonden verzameling wordt doorgaans in onze schoolboeken wèl behandeld, maar eerst nadat de bissectrice van een hoek als verzameling van de punten met gelijke afstanden tot de benen van een hoek reeds aan de orde is geweest. En de moeilijkheid die onze aandacht verdient, ligt juist in een houdbare definitie van het begrip 'afstand van een punt tot een been van een hoek'.
Tenslotte de derde definitie. Deze sluit aan bij de algemene definitie die we kunnen geven voor de afstand van twee puntverzamelingen: onder de afstand van de puntverzamelingen A en B verstaan we het minimum (eventueel: de onderste grens) van de afstanden van de punten van A tot de punten van B.



FIGUUR 3

In een latere fase kunnen we met behulp van deze definitie bijvoorbeeld de afstand van twee cirkels (cirkelomtrekken, cirkelschijven met of zonder rand) nader beschouwen.

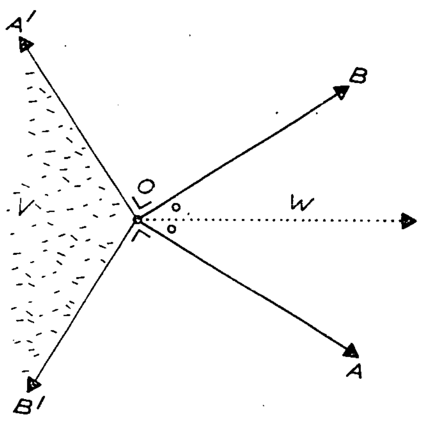
Nu is voor elk punt van het halfvlak dat in figuur 1 ter sprake kwam, de afstand tot de halve rechte *a* wel gedefinieerd.



FIGUUR 4

Deze afstand is *PO*.
Zie fig. 4.

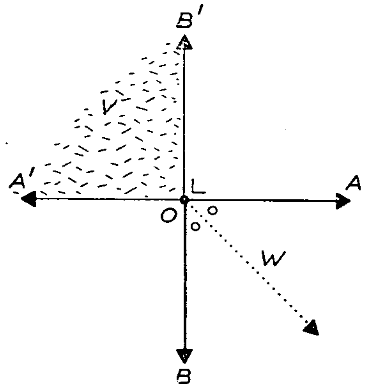
We beschouwen nu fig. 5.



FIGUUR 5

Welke is nu krachtens de derde definitie hier de verzameling van de punten die gelijke afstanden hebben tot de benen van de hoek *AOB?*
We trekken *OB'* loodrecht op *OA* en aan de andere zijde van *OA* dan waar *OB* ligt; analoog trekken we *OA'* loodrecht op *OB* en aan de andere zijde van *OB* dan waar *OA* ligt.
De gezochte puntverzameling bestaat nu uit de volgende deelverzamelingen: de verzameling van de punten die binnen het hoekgebied *A'OB'* of op de rand ervan ligt (we noemen deze verzameling *V*), èn de verzameling van de punten die liggen op de bissectrice van $\angle$ *AOB*; we noemen deze verzameling *W*.
De gezochte verzameling is $V \cup W$.

Tot slot gaan we nog na, wat er van de verzameling in kwestie wordt voor een inspringende hoek, bijvoorbeeld voor een hoek van 270°; zie fig. 6.



FIGUUR 6

Ook hier is de gezochte verzameling $V \cup W$, maar er heeft een merkwaardige verschuiving plaats gehad: de puntverzameling W (de bissectrice) ligt nu buiten $\angle AOB$ en het hoekgebied V is een deelverzameling van het hoekgebied AOB. Laten we $\angle AOB$ van 0° aangroeien tot 90°, daarna tot 180°, vervolgens tot 270° en tenslotte tot 360°, dan zien we het hoekgebied V eerst afnemen van 180° tot 90° en vervolgens tot 0°, om daarna weer toe te nemen eerst tot 90° en daarna tot een hoekgebied van 180°.
Een en ander leent zich tot illustratie in een kort filmpje.

Arnhem, 3 maart 1969.

Joh. H. Wansink.

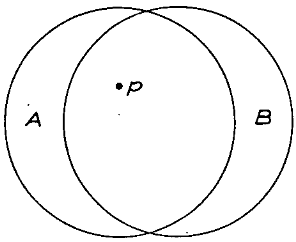
Het symmetrisch verschil van verzamelingen

B. BOKHORST

Rotterdam

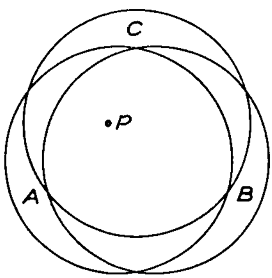
Het symmetrisch verschil van verzamelingen treffen we niet aan in de schoolwiskunde. Het volgende artikel kan men beschouwen als een aanmoediging om met verzamelingen te 'spelen'.

In figuur 1 zien we een venndiagram van twee verzamelingen A en B waarvan de doorsnede niet leeg is. Als *symmetrisch* verschil $A \triangle B$ van A en B wordt gedefinieerd de verzameling van de elementen die slechts tot A of slechts tot B behoren.



FIGUUR 1

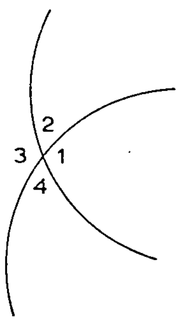
Het element p van de doorsnede van A en B behoort dus niet tot $A \triangle B$.
Het heeft zin van het symmetrisch verschil van meer dan twee verzamelingen te spreken, immers de bewerking 'het symmetrisch verschil nemen' is associatief. Men kan gemakkelijk controleren dat de gebieden in figuur 2, waarin een letter staat, de verzameling $(A \triangle B) \triangle C$ maar ook de verzameling $A \triangle (B \triangle C)$ voorstellen.



FIGUUR 2

Voor het symmetrisch verschil van de drie verzamelingen A, B en C kan men dus schrijven $A \triangle B \triangle C$.

Omdat bovendien het bepalen van het symmetrisch verschil van twee verzamelingen een commutatieve bewerking is kan men in $A \triangle B \triangle C$ ook nog de volgorde van de verzamelingen veranderen.
In figuur 2 blijkt dat het element p behoort tot $A \triangle B \triangle C$. We stellen $A \triangle B$ voor door $\triangle_1$, $A \triangle B \triangle C = \triangle_1 \triangle C$ door $\triangle_2$, $\triangle_2 \triangle D$ door $\triangle_3$, $\triangle_3 \triangle E$ door $\triangle_4$, enz. D, E, enz. zijn dan telkens nieuwe verzamelingen die we in onze beschouwingen erbij betrekken.
Nu blijkt dat het in figuur 1 gegeven element p wel element is van het 'gedurig' symmetrisch verschil als het aantal verzamelingen waartoe p behoort oneven is, daarentegen niet als het aantal verzamelingen even is.



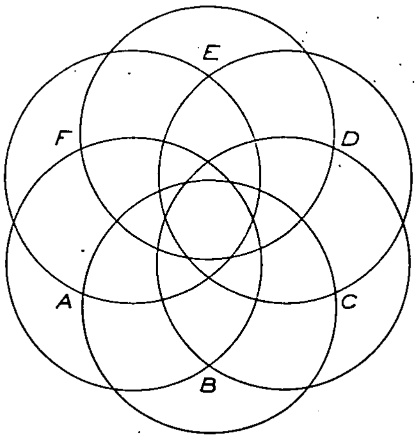
FIGUUR 3

Behoort in figuur 3 het gebied 1 tot het symmetrisch verschil dan behoort het gebied 2 er niet toe. Immers de elementen van gebied 2 behoren tot één verzameling meer of minder dan die van gebied 1. Gebied 3 behoort er dan wel weer toe, gebied 4 niet.



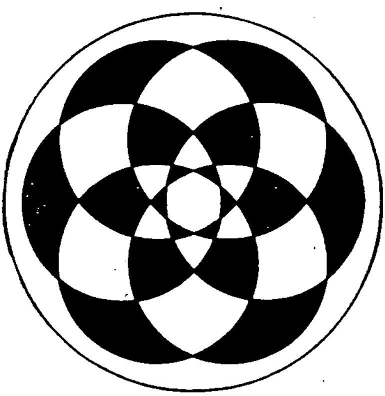
FIGUUR 4

In figuur 4 zijn in een venndiagram negen verzamelingen afgebeeld. De zwarte gebieden vormen hun symmetrisch verschil. Om deze gebieden te vinden kan men het best aan de buitenkant beginnen. Daar zijn immers wel gebieden, waarvan de elementen slechts tot één verzameling behoren.
Neem dan een gebied dat slechts met één of enkele punten aan het gekozen gebied grenst, maak dat ook zwart, enz.



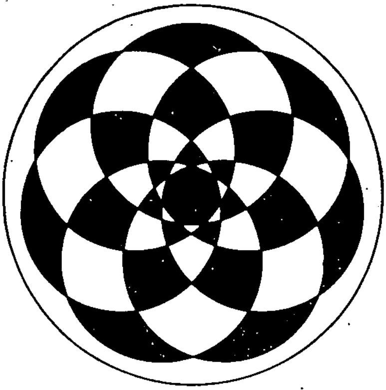
FIGUUR 5

In figuur 5 zijn 6 verzamelingen afgebeeld, door gelijke cirkels, die een regelmatige figuur vormen. Die regelmaat is natuurlijk niet nodig. Iedere cirkel snijdt de 5 andere cirkels.

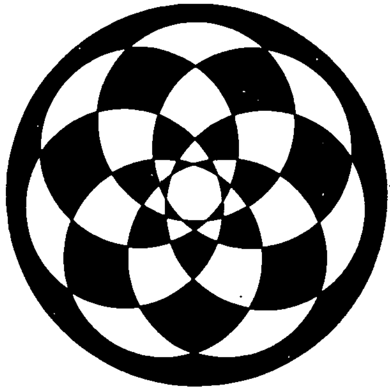


FIGUUR 6

In figuur 6 is afgebeeld het gedurig symmetrisch verschil $A \triangle B \triangle C \triangle D \triangle E \triangle F$. De 6 sikkels aan de buitenkant van de rozet behoren ieder slechts tot één verzameling en dus tot het symmetrisch verschil. Ze worden zwart gemaakt. Enz. Het gebied binnen de grote cirkel is het universum.



FIGUUR 7



FIGUUR 8

In figuur 7 zien we het symmetrisch verschil van 7 verzamelingen. De tekening komt overeen met die van figuur 6.
Met $\bar{A}$ wordt het complement van A bedoeld. We vragen naar $\bar{A}\triangle\bar{B}\triangle\bar{C}\triangle\bar{D}\triangle\bar{E}\triangle\bar{F}$.
We zien dat het buitenste gebied binnen de grote cirkel behoort tot 6 verzamelingen n.l. tot de 6 complementen van de verzamelingen A, B, C, D, E, F. Dat gebied behoort niet tot het symmetrisch verschil, daar het tot een even aantal, n.l. 6 verzamelingen behoort. Het blijft wit. Enz.
De afbeelding van $\bar{A}\triangle\bar{B}\triangle\bar{C}\triangle\bar{D}\triangle\bar{E}\triangle\bar{F}$ is dus dezelfde als die van $A\triangle B\triangle C\triangle D\triangle E\triangle F$.

We vragen nu naar het symmetrisch verschil van 7 verzamelingen, n.l.: $\bar{A}\triangle\bar{B}\triangle\bar{C}\triangle\bar{D}\triangle\bar{E}\triangle\bar{F}\triangle\bar{G}$. Het buitenste gebied binnen de grote cirkel behoort tot 7 verzamelingen n.l. de 7 complementen van de verzamelingen A, B, C, D, E, F en G. Het is dus een deel van het symmetrisch verschil. We maken het zwart. Enz.
Wat binnen de grote cirkels in figuur 7 wit is, is in figuur 8 zwart en omgekeerd.
We vinden dat

$$\bar{A}\triangle\bar{B}\triangle\bar{C}\triangle\bar{D}\triangle\bar{E}\triangle\bar{F}\triangle\bar{G} \cup A\triangle B\triangle C\triangle D\triangle E\triangle F\triangle G = U \text{(universum)}.$$

In het algemeen geldt:

$$\bar{A}_1\triangle\bar{A}_2\triangle\bar{A}_3\triangle\ldots\ldots\ldots\triangle\bar{A}_{2n} = A_1\triangle A_2\triangle A_3\triangle\ldots\ldots\ldots\triangle A_{2n}$$
$$\bar{A}_1\triangle\bar{A}_2\triangle\bar{A}_3\triangle\ldots\ldots\ldots\triangle\bar{A}_{2n+1} \cup A_1\triangle A_2\triangle A_3\triangle\ldots\ldots\triangle A_{2n+1} = U.$$

Openingsrede

van de voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Dr. Ir. B. Groeneveld voor de ledenvergadering van 13 september 1969 te Utrecht

Dames en Heren,

Op deze vergadering heet ik u allen van harte welkom. In het bijzonder noem ik de Heer E. H. Schmidt, inspecteur van het mavo en de Heer G. Krooshof vertegenwoordiger van de redactie van Euclides.
In december '67 is op de algemene ledenvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, toen nog Wimecos geheten, door enkele leden de vraag gesteld of het bestuur reeds had overwogen ook mavo-wiskundeleraren als leden van de vereniging toe te laten. Aanvankelijk is hierop door het bestuur negatief gereageerd, tendele omdat de statuten het lidmaatschap voor mavo-docenten onmogelijk maakten en ten dele omdat men, nadat reeds besloten was ook havo-wiskundedocenten als lid toe te laten, een verdere uitbreiding niet noodzakelijk achtte. De gemeenschappelijke problematiek ten aanzien van de modernisering van leerstof en didactiek, de verwezenlijking van de brugklasbedoeling, de doorstroming en de daaruit volgende noodzaak tot samenwerking van alle wiskundeleraren zijn factoren geweest waardoor het ingenomen standpunt is gewijzigd. Op de algemene ledenvergadering van december '68 zijn dan ook nieuwe statuten en een nieuw huishoudelijk reglement aan de leden ter goedkeuring voorgelegd. Door deze nieuwe regelingen kunnen alle wiskundeleraren het lidmaatschap van de vereniging verkrijgen. De ledenvergadering heeft op een enkel punt na de voorstellen aanvaard. Inmiddels is de koninklijke goedkeuring hierop verkregen.
De organisatie van de vereniging is nu zo geworden, dat aan het betuur enkele sectie-commissies zijn toegevoegd, die een zekere zelfstandigheid hebben, maar wel verantwoording schuldig zijn aan het bestuur. Ons bestuur telt reeds twee leden, die zich speciaal voor de mavo-zaken zullen inzetten.
Eén van de taken, die wij ons nu op deze vergadering stellen is het vormen van een sectie-commissie-mavo-havo en daarvan in het bijzonder het mavo-gedeelte. Verder heeft deze vergadering ten doel van u te vernemen welke wensen u ten aanzien van de activiteiten van de vereniging heeft.
Het tijdschrift Euclides, het orgaan van de vereniging, heeft als gevolg van de reorganisaties ook enkele veranderingen ondergaan. In de redactie hebben nu twee mavo-docenten zitting en de omvang van het tijdschrift zal toenemen. Er wordt natuurlijk een beroep gedaan op de nieuwe mavo-leden voor voldoende copie te zorgen. Tot nu toe heeft de redactie in dit opzicht niets te klagen gehad en zij heeft alle reden te verwachten, dat hierin geen verandering zal komen.
Het verheugt ons, dat de heer Jacobs zich bereid heeft willen en kunnen verklaren hier vandaag een lezing te houden. Juist door zijn grote activiteiten op het

terrein van de didactiek van de nieuwe wiskunde voor de diverse schoolsoorten meenden wij hem te moeten vragen.
Deze vergadering is georganiseerd in de vorm van een middag-bijeenkomst. Voor het onderling contact van de leden en vooral van onze nieuwe leden, is een volledige dag gunstiger. Dit is natuurlijk een kwestie, die door de sectiecommissie zal moeten worden bestudeerd.
Het blijkt voor de wiskundeleraren, na één jaar in de brugklas lesgegeven te hebben, al duidelijk dat we elkaar hard nodig hebben. Het goed adviseren van het voor de leerlingen meest geschikte onderwijs is alleen mogelijk als we goed op de hoogte zijn van elkaars programma's en ook van elkaars didactiek. Tot mijn vreugde heb ik kunnen constateren dat de meeste mavodocenten de invoering van de nieuwe wiskunde met enthousiasme hebben begroet. Deze geestdrift geeft reden te verwachten, dat dit ook uitstraalt in het verenigingsleven.
Ik neem aan dat de meesten van u dit jaar in de brugklasse voor de tweede keer les geven. Zoals met alle vernieuwing kan men pas een gefundeerd oordeel geven als men enkele jaren achtereen de stof met de leerlingen doorwerkt. Dit geldt ook voor de ervaren docent, temeer daar voor hem de omschakeling vaak moeilijk is. Men zal nu bij de tweede keer een veel beter inzicht hebben in de moeilijkheden waarvoor de leerlingen komen te staan. Het tweede leerjaar geeft ons natuurlijk weer volop nieuwe problemen. Gelukkig gaan de pedagogische centra dit jaar door met hun begeleiding van de mavo-docenten. De in het afgelopen cursusjaar gehouden bijeenkomsten hebben veel goeds opgeleverd. De cursussen voor moderne wiskunde, uitgaande van de commissie modernisering Leerplan Wiskunde, speciaal bestemd voor leraren bij het mavo-onderwijs gaan nu (behoudens enkele uitzonderingen) hun derde jaar in. Ze zijn van onschatbare waarde en ik kan me moeilijk voorstellen, dat er nog mavo-docenten zouden zijn, die hieraan niet zouden deelnemen.
Met de wens, dat deze samenkomst voor u allen van betekenis is, open ik de vergadering.

Test en enquête computerkunde

Ir. S. M. ARGELO
docent Veluws College, Apeldoorn

In het schooljaar 1969–1970 wordt aan een aantal HAVO-scholen computerkunde gegeven. Hierbij wordt als leidraad gebruikt het boekje 'Computerkunde bij VWO, HAVO en MAVO' van prof. dr. A. van der Sluis e.a.. Er wordt één uur per week les gegeven. Aan één van deze scholen, het Veluws College in Apeldoorn, worden de lessen computerkunde gegeven aan 79 leerlingen in de vierde klas HAVO, in 4 parallelklassen. In het eerste lesuur van het jaar werden 7 testvragen en 5 opinievragen op de leerlingen afgevuurd, volgens het antwoord-selectie systeem. Zij waren onvoorbereid en dus representatief voor het kennisniveau dat een leraar computerkunde aan het begin mag verwachten aan te treffen, als tenminste HAVO-4 aan het Veluws College representatief mag worden geacht voor andere HAVO 4e klassen.
Aan de test deden 42 meisjes en 37 jongens mee. Bovendien waren er 14 belangstellende leraren, die de les als toehoorders volgen. Hun respons wordt verder buiten beschouwing gelaten, er mag worden volstaan met de opmerking dat hun score op de 7 testvragen significant beter was dan bij de leerlingen.
Er waren geen opmerkelijke verschillen tussen de antwoorden van meisjes en jongens, behalve bij de enquête-vragen 1 en 2, waarbij het resultaat gedifferentieerd is vermeld.
De score op de testvragen bedroeg 3,10 goede antwoorden uit 7 vragen. Dit is niet hoog, zeker als men bedenkt dat bij lukraak antwoorden de verwachting van de score 1,75 is. Als de blijkbaar moeilijke testvraag 4 buiten beschouwing wordt gelaten, dan bedraagt de score 3,01 uit 6 vragen.
Opmerkelijk is dat slechts één jongen de computerlessen nuttig vindt omdat hij van plan is in dat vak te gaan. Opmerkelijk is verder de sterk overwegende belangstelling voor de toepassingen, ten opzichte van de computer zelf of het werken ermee.
Waarom nu een dergelijke enquête? Ik meen om vier redenen:

- Om de docent computerkunde een idee te geven van de situatie die hij aantreft.
- Om de resultaten te vergelijken met die van een soortgelijke enquête na afloop van het schooljaar (wat heeft het allemaal uitgehaald?)

- Om de leerlingen het prettige gevoel te geven dat hun opinie op prijs wordt gesteld (repressieve tolerantie?)
- Om, na inlevering van de antwoorden, de behandeling ervan (welk antwoord goed, waarom zijn de andere fout) als aanloop te gebruiken bij het lesgeven, daarbij is dan belangstelling verzekerd.

Hieronder volgen de vragen met de antwoorden en de resultaten in procenten. Afwijkingen van 100% zijn het gevolg van gecumuleerde afrondingen. Eén leerling staat gelijk met 1,27%.

Testvragen

1	Hoeveel computers denk je dat er al in Nederland zijn?	
a	Ongeveer 50 (fout)	19
b	Ongeveer 350 (fout)	34
c	Ongeveer 1000 (goed)	30
d	Ongeveer 2500 (fout)	15
	geen antwoord	1
2	Wat denk je dat een computer kan?	
a	Moeilijke problemen oplossen die de mens niet aankan (minder goed)	35
b	Makkelijke problemen veel vlugger oplossen dan een mens (goed)	52
c	Veel sneller rekenen, maar wel onnauwkeuriger dan een mens (fout)	5
d	Veel nauwkeuriger rekenen, maar niet sneller dan een mens (fout)	6
	geen antwoord	1
3	Wat kan een computer beslist *niet*?	
a	Een huis bouwen (goed)	92
b	Een schip besturen (fout)	0
c	Een spelletje schaak spelen (fout)	5
d	een boek vertalen (fout)	3
	geen antwoord	0
4	Waarom rekent de mens in het tientallig stelsel?	
a	Omdat het rekenen in elk ander stelsel ingewikkelder is (fout)	43
b	Omdat het getal 10 lang geleden een heilig getal was (fout)	0
c	Omdat de getallen in het tientallig stelsel het eenvoudigst kunnen worden opgeschreven (fout)	48
d	Omdat de mens tien vingers heeft (goed)	9
	geen antwoord	0
5	Als je de computer een aantal opdrachten wil laten uitvoeren, dan moet je	
a	De reeks opdrachten één voor één door de computer laten lezen, en stuk voor stuk laten uitvoeren (fout)	28

b De computer de hele reeks opdrachten laten lezen en op een knop drukken, waarna de uitvoering begint (goed) 42
c Alleen maar de stekker in het stopcontact steken, want de reeks opdrachten ligt voor een bepaalde computer vast (fout) 4
d De computer met behulp van stekkertjes op een paneel, of door verwisselen van draadjes, in order brengen voor de gewenste reeks opdrachten, en dan op een startknop drukken (minder goed) 25
geen antwoord 1

6 Het technische binnenwerk van een computer lijkt het meest op
a Een telefooncentrale (goed) 29
b Een radiotoestel (fout) 10
c Een tandwielkast (fout) 3
d Een bandopnameapparaat (fout) 56
geen antwoord 3

7 De les computerkunde zal volgens jou het meest te maken hebben met
a Algebra (minder goed) 24
b Boekhouden (minder goed) 11
c Geen noemenswaardige overeenstemming met een ander vak, dat je op deze school krijgt (goed) 56
d Natuurkunde (fout) 8
geen antwoord 1

Enquêtevragen

1 Heb je wel eens van computers gehoord?
a Voor het eerst toen je hoorde hier op school computerkunde te krijgen 0
b Wel eens iets over gelezen in krant of tijdschrift (dit antwoord gaf 86% van de meisjes en 57% van de jongens) 72
c Iets meer begrip van computers door lezingen, of TV-cursus, of vader die in dat vak zit, of leraar die er over vertelde, en dergelijke (dit antwoord gaf 14% van de meisjes en 38% van de jongens) 25
geen antwoord 3

2 Hoe zie je de computer?
a Als een gebruiksvoorwerp dat je best zelf kunt leren gebruiken, zoals ook een fiets, een potlood en een telefoon gebruiksvoorwerpen zijn (dit antwoord gaf 52% van de meisjes en 84% van de jongens). 67
b Als een ontzettend ingewikkeld apparaat, waar alleen heel knappe specialisten mee om kunnen gaan. (dit antwoord gaf 31% van de meisjes, en 8% van de jongens) 20
c Als iets angstaanjagends, dat misschien wel meer kan dan de mens,

en waardoor wij allen zullen worden overheerst (14 % van de meisjes, 3 % van de jongens) 9

geen antwoord 4

3 De computer zal veel werk van de mensen gaan overnemen

a Je vindt dat slecht, omdat veel mensen werkeloos kunnen worden, en zich vervelen 11

b Je vindt dat goed, omdat de mensen dan geen dom werk meer hoeven te doen en meer vrije tijd krijgen 32

c Je gelooft helemaal niet dat de mensen door de computer minder te doen krijgen 53

geen antwoord 4

4 Wat hoop je in de lessen computerkunde hoofdzakelijk te leren?

a Hoe een computer technisch in elkaar zit 5

b Hoe iemand die direct met de computer te maken heeft, er mee moet werken 14

c Hoe de computer kan worden toegepast en nuttig gemaakt in de maatschappij 77

geen antwoord 4

5 Wat denk je dat voor jou in de eerste plaats het nut is van de les in computerkunde?

a Om zelf later in het computervak te gaan 1

b Omdat de computer zo belangrijk wordt, dat iedereen er wel iets mee te maken krijgt 94

c Omdat je verwacht dat je door computerkunde beter logisch leert denken 0

geen antwoord 5

Wel of niet de tweede afgeleide?

J. VAN LINT
Zwolle

Geruime tijd geleden, heeft men mij ervan overtuigd, dat het gebruik van de tweede afgeleide van een minstens twee maal differentieerbare functie, voor het bepalen van de aard van de uiterste waarden van die functie, in de klas, niet verstandig is. Het werken met het tekenverloop van de eerste afgeleide heeft didactisch grote voordelen en bovendien zijn er vele voorbeelden, waarbij het 'trucje' met de tweede afgeleide niet opgaat of pas na langdurig gereken. Helaas kwamen bij eindexamens vaak opgaven die met het bewuste trucje veel sneller op te lossen waren dan met het tekenverloop van de eerste afgeleide. Dat dit een zwak argument is, besef ik, maar toch kwamen hierdoor mijn gedachten elk jaar weer terug op die tweede afgeleide.
Sinds enkele jaren behandelen we op de experimenteerscholen, in de analyse, eenvoudige differentiaalvergelijkingen. Van Dormolen heeft hierover een zeer interessant en helder artikel geschreven in Euclides 44-I. Tijdens het experiment is gebleken, dat het bespreken van differentiaalvergelijkingen zeer nuttig is, mits we onze leerlingen niet te veel oplossingsmethoden gaan inpompen.
Het bestuderen van een lijnelementenveld kan een indruk geven van de oplossingen van de diff.vgl. Het is op de middelbare school goed mogelijk een onderzoek te laten instellen, naar eigenschappen van oplossingen van een diff.vgl. zonder deze aldaar te laten oplossen.
Hoewel we wel geprobeerd hebben om onze leerlingen een methode te leren voor het oplossen van de diff.vgl. van het onderstaande voorbeeld, wil ik het toch beschouwen als een voorbeeld waarbij de oplossingen niet bepaald behoeven te worden.

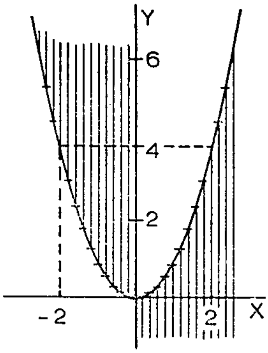
Gegeven: de diff.vgl. $x \cdot y' = x^2 - y$
de oplossingen zijn gedefinieerd op $\mathbf{R}/\{0\}$

Gevraagd: als een oplossing een uiterste waarde 4 heeft, onderzoek dan de aard van die uiterste waarde.

Oplossing 1

We laten ons leiden door een lijnelementenveld. De punten van de integraalkrommen waardoor raaklijnen gaan die evenwijdig zijn met de X-as, zijn de

punten van de isokline met $y' = 0$. Dit ingevuld in de diff.vgl. levert als vgl. voor de verzameling van die punten: $y = x^2$.



FIGUUR 1

We gaan arceren het gebied waar lijnelementen liggen met positieve richtingscoëfficiënten:

$$y' = \frac{x^2 - y}{x} > 0 \quad \text{als} \quad x^2 > y \quad \text{en} \quad x > 0 \quad \text{of als} \quad x^2 < y \quad \text{en } x < 0.$$

Met behulp van de tekening ontdekken we:

1 de integraalkromme gaat door $(-2, 4)$ of $(+2, 4)$
2 zowel voor $x = -2$ als voor $x = +2$ geldt:

in een linkeromgeving is $y' < 0$ en in een rechter omgeving is $y' > 0$ dus de aard van het uiterste is een *minimum*.

Oplossing 2

Differentieer beide leden van de diff.vgl. naar x.

$$x \cdot y'' + y' = 2x - y'$$

Voor de uiterste waarden geldt $y' = 0$ (en $x \neq 0$) dus:

$$xy'' = 2x$$

$$y'' = 2 > 0.$$

Hieruit volgt dat het uiterste een *minimum* is.
Uit de oplossing 2 blijkt weinig inzicht in het probleem. Bij een behandeling in de klas moet dit daarom afgeraden worden.
Niettemin kan zo'n oplossing gegeven worden, indien degelijk behandeld zijn de 'stellingen':

1 als in (x_0, y_0) $y' = 0$ en $y'' > 0$ dan is y_0 een minimum van de functie.
2 beide leden van een diff.vgl. differentiëren naar x is een geoorloofde handeling.

Voor het begrijpen van deze 'stellingen' is wel veel inzicht nodig. Persoonlijk ben ik van mening dat we het beste:

A zoveel mogelijk met het teken verloop van de eerste afgeleide moeten werken;

B in een later stadium de voor- en nadelen van het gebruik van de tweede afgeleide in enkele lessen moeten demonstreren.

Boekbespreking

Prof. Dr. A. D. de Groot en medewerkers, *Bewegingsmeetkunde*, 158 blz., ingen. f 12,90, Wolters-Noordhoff n.v., Groningen, 1968.

Deze nieuwe uitgave in de reeks *Empirische studies over onderwijs* verschaft aan de Nederlandse wiskunde-leraar een uitgebreide en waardevolle documentatie over experimenten die in de jaren 1956–1964 op verzoek van de Drie Pedagogische Centra door het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie te Amsterdam werden uitgevoerd. Doel van het onderzoek is geweest: het bepalen en met elkaar vergelijken van twee verschillende meetkunde-methoden of -didactieken. De bewegingsmeetkunde werd gekozen en tegenover de traditionele congruentiemeetkunde geplaatst. De docenten Troelstra, Habermann, De Groot en Bulens vonden destijds in hun ervaringen opgedaan bij dit experiment aanleiding tot het schrijven van het driedelige leerboek *Transformatiemeetkunde*, dat in de onderwijswereld bekendheid en waardering heeft verworven. Prof. De Groot licht in zijn nieuwe uitgave uitvoerig toe waarom inderdaad de naam 'transformatiemeetkunde' de voorkeur verdient boven de oorspronkelijk gekozen term 'bewegingsmeetkunde'.
De inhoud van dit werk waarvan de publikatie mogelijk werd gemaakt door de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs S.V.O. was bij velen in den lande uit voorlopige rapporten reeds grotendeels bekend. De auteur somt in zijn *Woord vooraf* enige motieven op die de nieuwe uitgave rechtvaardigen: (1) de rapporten die het project indertijd hebben begeleid, zijn niet alle meer beschikbaar; (2) het nieuwe werk bevat een aantal niet eerder gepubliceerde gegevens, met name over de meetkundeserietest en twee attitudetests; (3) de gehele tekst is opnieuw geschreven en daarbij stilistisch en structureel verbeterd; (4) de problemen van methodiek en didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het voortgezet onderwijs zijn thans minstens even actueel als in de jaren van het experiment; (5) het gehele onderzoek kan beschouwd worden als een model voor action research in het onderwijs. Vandaar de ondertitel die de auteur aan het werk meegeeft: *Verslag van een gecontroleerd innovatie-experiment.*
Het boek bevat een schat van gegevens die iedere wiskundedocent die kritisch staat tegenover het door hem te geven onderwijs zullen interesseren: over de inrichting van het experiment, over de didactische analyse van de bewegingsmeetkunde, over de 'instrumenten' bij het onderzoek gebruikt en over de bevindingen met de tests.
Schokkend zijn de resultaten niet; op p. 81–82 worden ze in veertien punten samengevat. De resultaten van de meetkundetestserie blijken na een jaar onderwijs in de bewegingsmeetkunde noch beter noch slechter dan na een jaar traditioneel onderwijs.

In het laatste hoofdstuk getiteld *Evaluatie van een evaluatieonderzoek* wordt de vraag gesteld of de bewegingsmeetkunde 'beter' is dan de traditionele. Er wordt geconcludeerd dat voor de goede leerling het onderwijs in de bewegingsmeetkunde intellectueel minder stimulerend werkt dan het traditionele onderwijs, maar dat het voor de zwakke leerlingen minder demoraliserend is.
De auteur stelt in dit laatste hoofdstuk een aantal principiële vragen: gaat het op school allereerst om onderwijs of om selectie? Gaat het om fundamentele specifieke training of om algemene denktraining? Welke is de betekenis van het ruimtelijk inzicht in ons meetkundeonderwijs? Bij de eerste vraag komt het kernprobleem uit De Groots '*Vijven en zessen*' in het geding. Nadrukkelijk wijst de auteur op het feit dat evalueren van onderwijsresultaten alleen maar zin heeft met betrekking tot duidelijk geformuleerde onderwijsdoelstellingen. En deze duidelijkheid laat in het tegenwoordig bestel nog veel te wensen over.
Vele lezers zullen het op prijs stellen, dat de tekst van de meetkunde-voorkeurtest, van de meetkunde-attitudetests en van de meetkunde-testserie volledig in het boek konden worden opgenomen. Hierdoor wordt de leraar in de gelegenheid gesteld zich betrouwbaar te oriënteren ten aanzien van tal van details van de gedane onderzoekingen.

Joh. H. Wansink

K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes, P. C. Schnetz, *Wiskunde voor de tweede klas*, V.W.O. deel I, 142 blz., f 6.90, havo-mavodeel, 110 blz., f 6.50, J. Noorduijn en Zoon N.V., Gorichem, 1969.

Na een samenvatting van de algebra en meetkunde uit de brugklas, komen in beide delen de verzamelingen opnieuw aan de orde, waarna vergelijkingen en ongelijkheden.
Waarom we nu nog over 'valse' vergelijkingen spreken ontgaat me. Consequent verwacht men dan ook 'valse' ongelijkheden! Het lijkt me onnodig deze onjuiste 'naam' in te voeren. Men kan immers volstaan met het bepalen van de oplossingsverzameling en die mag toch wel leeg zijn?
De 'bijzondere puntverzamelingen' geven weer een uitbreiding van de meetkunde, waarbij de doorsnede en vereniging; de altijd moeilijke voegwoorden *en* en *of* worden vervangen door de bekende symbolen.
Het V.W.O.-deel behandelt de reële getallen m.b.v. oneindige rijen inkrimpende intervallen. Wel meen ik, dat de schrijvers hadden kunnen mededelen dat juist door de invoering van een *decimale* schaal op de getallenlijn, de rationale getallen in twee soorten gesplitst worden. De rationale getallen zelf zijn hier niet debet aan.
Beide delen behandelen de wortels, waarbij ook de rekenliniaal gebruikt wordt.
De samenvattingen aan het eind vind ik zeer geslaagd. Aan de tekst en aan de uitvoering is grote zorg besteed.

Burgers

Drs. E. J. Wijdeveld, *Nieuwe Wiskunde*, deel I: Taal en logica, 176 blz. Uitg. Wolters-Noordhoff. Prijs f 18,75.

Dit boek en de twee delen, die nog zullen verschijnen, hebben als leidraad gediend, in hun oorspronkelijke versie, voor heroriënteringscursussen voor leraren mavo en m.t.o.
Het eerste hoofdstuk: 'Axioma's: ongedefinieerde begrippen en relaties', is een helder betoog over de grondslag van de wiskundige denkwijze. Als toepassing wordt een axiomastelsel

besproken, dat als wiskundig model een eindige meetkunde krijgt toegekend. Ik stuit hier op het probleem of men bij het geven van de primitieve relaties: 'bepalen' en 'liggen op' niet tevens moet geven in hoeverre 'bepalen' 'liggen op' implicieert. Als tweede fraaie illustratie, voor de schoolpraktijk zeer bruikbaar, wordt een boole-algebra gedefinieerd, waarbij als wiskundig model schakelingen in een elektrisch circuit kunnen dienen.
De hoofdstukken II en III over verzamelingen en logica hebben de grote verdienste, dat zij voortdurend het verband leggen tussen de behandelde theorie en de schoolwiskunde. Met name mag genoemd worden de heldere uiteenzetting over de betrekking tussen de logica en de wiskundige bewijzen.
Hoofdstuk IV definieert na een intuïtieve inleiding relaties als verzamelingen geordende tweetallen en ook als deelverzamelingen van het cartesisch produkt van twee verzamelingen. Functies worden dan gedefinieerd als bijzondere relaties. Aangetoond wordt, dat men een functie ook kan beschouwen als een operatie, die aan elk element van een verzameling X één element van een verzameling Y toevoegt.
Een beschouwing over de begrippen homomorfisme, isomorfisme en permutatie besluit het boek.
Iedere leraar, die zich t.a.v. de moderne wiskunde, gezien in het licht van de schoolpraktijk, nader wil informeren en trouwens een ieder, die zich van de moderne ontwikkelingen op de hoogte wil stellen, kan ik dit boek zeer aanbevelen.

L. J. M. v. d. Zijden

Drs. Chr. Boermeester, B. Burger, dr. P. M. van Hiele: *Van A tot Z,* Werkboek der wiskunde voor het brugjaar; delen 1a en 1b. Prijs resp. f 5.90 en f 6,15.

Dr. P. M. van Hiele, Ir. K. Kok, H. N. Schuring: idem deel 1c. Prijs f 5,90. Uitg. J. Muusses N.V.

De methode van A tot Z zal een volledige leergang gaan vormen voor Mavo, Havo en Vwo. De delen 1a en 1b bevatten de leerstof voor brugklas Mavo. Deel 1c geeft aanvullende stof voor overstap naar Havo of Vwo.
Het meest opvallende is het centraal stellen van het begrip afbeelding, dat reeds in les 1 wordt ingeleid. Het onderwerp functies volgt nu onmiddellijk en wordt spoedig toegelicht met pijlenschema's en grafieken. Eerst halverwege deel 1a komen verzamelingen aan de orde. De invoering van negatieve getallen volgt na de vraag: 'Wat is het beeld van het origineel 0 bij de functie $x \rightarrow x-1$?'. De opbouw van het getallensysteem wordt in deel 1c uitgebreider besproken.
Meetkunde wordt zo min mogelijk als afzonderlijk onderwerp besproken. Begrippen uit de algebra worden ook hier zoveel mogelijk toegepast.
Er is een uitgebreide intuïtieve inleiding, waarbij stereometrische figuren een grote rol spelen. Een vroegtijdige invoering van coördinaten en veel aandacht voor transformaties zijn tot slot nog enkele karakteristieken.
Deze korte beschrijving is zeer onvolledig. Ik wil mij ook onthouden van een waarde oordeel betreffende de gevolgde opbouw. Men moet gebruiker zijn met enige ervaring om zich in kritische zin uit te laten, als het gaat om een methode met een zo originele aanpak.
Ik kan toch niet nalaten mijn waardering te uiten voor de wijze, waarop men de leerlingen de stof aanbiedt. Een voor hen prettige tekst, voortdurend met opgaven doorspekt, dwingen tot zelfstandig doordenken van de leerstof.
Ik kan de besproken leerboekjes iedere leraar aanbevelen, als interessante poging bij de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs.

L. J. M. v. d. Zijden

Drs. H. Jansen, *Algebra voor de tweede en derde klas van het havo*, L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1969, 126 blz., f 5.90.

Na een behandeling van eenvoudige wortelvormen volgt een korte herhaling van het hoofdstuk verzamelingen uit het eerste deel. Na relaties en coördinaten volgen grafieken van lineaire functies. Met het oog op moeilijkheden die ontstaan door het invoeren van een richtingscoëfficiënt zou het de moeite waard zijn te overwegen deze te vervangen door een richtingsvector. Deze kan t.z.t. gebruikt worden om een normaalvector in te voeren en omgekeerd. Uitzonderingen zijn dan verdwenen.
Aansluitend volgt dan de behandeling van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. (Zou men de oplosbaarheid niet eenvoudig kunnen definiëren als het vaststellen van de oplossingsverzameling?)
Na functies en vierkantsvergelijkingen volgt een behandeling van de rekenliniaal. Evenals het hoofdstuk statistiek lijkt me de behandeling duidelijk en eenvoudig.

Burgers

Dr. A. van Dop, Dr. Ir. B. Groeneveld, Dr. A. van Haselen, Drs. L. W. van der Horst: *Moderne Algebra* voor VWO en havo, deel I voor de brugklas, 111 blz., Uitg. Wolters-Noordhoff, Groningen.

Verzamelingen, inclusief het begrip vereniging en geïllustreerd met venndiagrammen vormen het eerste onderwerp.
De verzameling der natuurlijke getallen wordt vervolgens ingeleid met het axioma van Peano: Elk natuurlijk getal heeft een opvolger. Telrijen (a, $2a$, $3a, \ldots$) worden geïntroduceerd. Het optellen van natuurlijke getallen en van elementen van een telrij gebeurt met behulp van een getallenlijn.
De overige bewerkingen in N_0 met de bekende eigenschappen komen aan bod. Dat hierbij het bepalen van de som van elementen van een telrij een toepassing is van de distributieve eigenschap wordt naar mijn gevoel te weinig benadrukt.
K.g.v. en g.g.d., vergelijkingen en ongelijkheden in N_0 ronden hoofdstuk II af.
Bij de uitbreiding van N_0 tot G vielen mij op: 1. De abrupte wijze waarop de negatieve getallen worden ingevoerd. 2. De m.i. onnodige definitie: Onder de absolute waarde van een positief of negatief getal verstaan we het natuurlijke getal, dat ontstaat door het plus- of minteken weg te laten. 3. De behandeling van de tekenregel van het vermenigvuldigen. Gebruikt wordt de definitie: Vermenigvuldigen met -5 is hetzelfde als vermenigvuldigen met $+5$ en van het resultaat het tegengestelde nemen. Het produkt van -5 en -9 volgt nu logisch uit $(+5)(-9)$.
Hoofdstuk IV bespreekt de verzameling Q met zijn ordening en bewerkingen. Bij de vergelijkingen wordt het begrip identieke vergelijkingen behandeld en bij ongelijkheden opgaven van het type $2 < -3x < 7$. Met dit laatste gaat de methode verder dan de eisen van he leerplan, zoals die besproken worden in de toelichting van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.
Ik acht dit boek in zijn wijze van behandeling veel te moeilijk. Zelfstandig doorlezen en begrijpen van de theorie door een v.w.o. leerling lijkt mij niet mogelijk. Ik kan mij bijvoorbeeld met spanning afvragen, hoe 'n brugklaspupil zal reageren, als hij leest: 'Definitie: $a^0 = 1$ met $a \in N$ (niet: $a \in N_0$)'. Hij moet dit namelijk incasseren, voordat het rekenen met machten aan bod komt.
Het begrip lege verzameling wordt gedefinieerd zonder inleidende voorbeelden evenals de afspraak: 'De lege verzameling is deelverzameling van iedere verzameling.'
Voor een leraar, die graag zelf aan z'n leerlingen de leerstof aanbiedt, zijn dit geen over-

wegende bezwaren. In ieder geval heeft men als gebruiker de beschikking over een prachtige, ruime vraagstukkenverzameling, waarin de rekentechniek gelukkig ruimschoots zijn deel krijgt.

van der Zijden

A. R. Jonker, H. J. Zijderveld, *Wiskunde, rekenen met machten*, Wolters-Noordhoff, 1969, 43 blz., f 3,90.

Dit is een geprogrammeerde cursus, uit het Duits bewerkt. De oorspronkelijke titel is: *Rechnen mit Potenzen* van H. Fiebig en H. Junghaus, uitgegeven door G. Westermann Verlag. Mijn indruk van een geprogrammeerde methode is altijd weer: Men leert het onderwerp technisch wel beheersen, maar aan inzicht wordt weinig aandacht besteed. Wanneer een docent tot gebruik overgaat, dient hij m.i. hiervan terdege bewust te zijn, zodat er wel degelijk een taak overblijft en geen gemakkelijke.
Zo lees ik op blz. 19

$$a^{5-5} = a^0 = 1,\ b^{5-4} = b^1 = b$$

en dan onmiddellijk:

Iedere macht is een produkt van gelijke factoren.

En nu mag ik mijn vingertje niet opsteken, want als ik het niet begrepen heb moet ik weer vooraan beginnen. Ik kom er niet uit (in).

Burgers

Dr. Th. G. D. Stoelinga, dr. H. G. van Tol, *Meetkunde voor de brugklas* (met werkschrift), N.V. Tjeenk Willink, Zwolle, 1968, 80 blz. (werkschrift 104 blz.). Prijs f 7,—, werkschrift f 6,60.

Deze aanvangscursus in de meetkunde is bedoeld voor alle brugklassen en is daarom eenvoudig gehouden. De inleiding, een intuïtieve, gaat uit van kubus en balk. Aandacht wordt gevestigd op elementaire transformaties zoals spiegeling, translatie en rotatie.
Wel meen ik dat het typische van gespiegelde figuren niet direct in het oog springt door te wijzen op het feit dat een diagonaalvlak de kubus in twee lichamen verdeelt die elkaars spiegelbeeld zijn. Ook de behandeling van de rotatie in dit stadium lijkt me moeilijk verteerbaar.
Een groot aantal oefeningen, mede door het royale werkschrift, zal uitstekend van pas komen. Al met al meen ik, dat de schrijver erin geslaagd is een niet al te gecompliceerde cursus samen te stellen waarmee wel te experimenteren valt.

Burgers

M. F. van Raay, *Geprogrammeerde instructie wiskunde*, Uitgever Stichting VAM, Voorschoten, 1969, 240 blz., f 19,90.

De instructie is bedoeld voor eerstejaarsstudenten in de faculteit der Sociale Wetenschappen te Leiden. De instructie vermijdt alle theorie, exacte definities ontbreken en zo hier en daar wil men dan ook wel eens een vraagteken plaatsen. Een enkel voorbeeld: 'Een functie nadert oneindig dicht tot een asymptoot maar snijdt de asymptoot niet' (blz. 204).
Hoe een functie iets kan snijden is moeilijk in te zien en evenmin waarom de grafiek van een functie (want dat zal toch wel bedoeld zijn) een asymptoot niet zou mogen snijden.
De eerste 50 bladzijden behandelen de elementaire technieken. Daarna volgen permutaties en combinaties (het binomium). Aan het hanteren van de rekenliniaal wordt veel aandacht

besteed. Daarna volgen histogrammen, grafieken, functies, rijen en limieten. Het boek besluit met eenvoudige afgeleiden en het bepalen van oppervlakten.
Het nut van hoofdstuk 3, verzamelingen, ontgaat me. Het komt verder in het boek niet voor. Voor het aanleren van technische vaardigheden zal het intussen wel goede diensten bewijzen.

Burgers

Nuffield Wiskunde Project, *Ik doe en ik begrijp*, 56 blz., ingen. *f* 4,75, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1969.

In Engeland zijn in de jongste tijd een aantal didactische experimenten ondernomen die alle een radicale herziening van leerstof en methode in het wiskunde-onderwijs beogen. Storer heeft hierover in 1965 in de 41e jaargang van Euclides uitvoerig gerapporteerd. We noemen het *School Mathematics Project*, uitgevoerd onder leiding van Thwaites, het *Midland Mathematics Project* en *The Nuffield Mathematics Teaching Project*. De publicatie *I do and I understand*, die hier thans in Nederlandse vertaling verschijnt, beoogt een introductie te geven op het werk van het laatstgenoemde experiment.
Zullen de radicale moderniseringspogingen die sinds de tweede wereldoorlog internationaal ondernomen worden, blijvend succes hebben, dan is het noodzakelijk dat de hervormingen zich niet beperken tot de sfeer van het middelbaar onderwijs, maar dan dient ook het lager onderwijs in die modernisering te worden betrokken. De activiteiten van het *Nuffield Project* nu hebben uitdrukkelijk betrekking op de leeftijdsgroep van 5 tot 13 jaar. Nieuw leermateriaal voor het basisonderwijs wordt in dit project gemaakt en getest.
Ik doe en ik begrijp geeft een goed overzicht van de onderhavige problematiek. De behoeften aan een herziening van het rekenonderwijs op de lagere school worden toegelicht, diverse didactisch-psychologische aspecten van wiskunde-onderwijs in het basisonderwijs naar voren gebracht. Het leren-door-ontdekken, het spelkarakter in het onderwijs, de betekenis van concrete hulpmiddelen, de inrichting van een klasselokaal, de organisatie van het leerproces, dit alles krijgt in dit boekje de nodige aandacht. Aan de betekenis van het werk van Piaget, wiens onderzoekingen in de Nederlandse onderwijspraktijk tot dusver nog niet de waardering hebben weten te verwerven die ze verdienen, wordt aandacht besteed.
Het boekje is eenvoudig geschreven.
Het verdient onder ogen te komen van alle wiskundeleraren bij het voortgezet onderwijs die belangstellen in de problemen van de longitudinale leerstofplanning.

Joh. H. Wansink

Dr. J. van Tiel, *Versnelling en beweging*, Torusreeks nr. 3, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1968, 56 blz.

Een afleiding van de wetten van Kepler via enkele kinematische beschouwingen over het stoffelijk punt, die de goede leerlingen van de hoogste klassen zeker, zij het niet zonder inspanning, moeten kunnen begrijpen.
De ontwikkeling van de ruimtevaart maakt de behandelde stof actueel en dit zal een extra stimulans voor hen zijn zich er in te verdiepen. Bij de voortgezette studie, die we van deze leerlingen na de middelbare school mogen verwachten, zullen zij zeker veel profijt hebben van wat ze uit dit boekje kunnen leren. De wijze, waarop de schrijver gebruik maakt van de vectorrekening, maakt de oplossingen van de gestelde problemen zeer overzichtelijk. De behandeling is wiskundig correct; ik heb niet kunnen ontdekken, dat iets zo maar is aangenomen of onbewezen gelaten, zonder dat dit uitdrukkelijk is opgemerkt. Voor plaatsing in de leerlingenbibliotheek wil ik het boekje graag aanbevelen.

H. W. Lenstra

Arnold Oberschelp, *Aufbau des Zahlensystems*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1968, 184 blz.

Men vindt in dit boek een volledige invoering van de natuurlijke tot en met de complexe getallen, waarbij geen enkel detail de lezer onthouden blijft. Het uitgangspunt wordt gevormd door de axioma's van Peano. Daarna volgt een grondige rechtvaardiging van de inductieve definieermethode en een afleiding van de eigenschappen van de bewerkingen met natuurlijke getallen door middel van volledige inductie. Gehele en rationale getallen worden ingevoerd door middel van het inbedden van een semigroep in een groep. De reële getallen ontspringen uit fundamentaalrijen conform de methode van Cauchy. Ten slotte ontstaan uit de reële getallen de complexe door paarvorming. De schrijver geeft zich verder de moeite ervoor zorg te dragen, dat elk nieuw systeem het voorgaande omvat (en niet slechts een deel heeft, dat isomorf met het voorgaande is). Het komt me voor, dat het extra werk, dat dit met zich meebrengt, niet opweegt tegen de discutabele voordelen ervan. En passant maakt de lezer kennis met ringen, integriteitsgebieden en lichamen, waardoor hij de getalsystemen in een algemener licht kan bezien. Wie een goed gefundeerd inzicht wenst te verkrijgen in de bouw van getalsystemen, kan dit werk stellig aanbevolen worden.
Een enkele opmerking: de schrijver gebruikt uitspraken, waarin vrije variabelen voorkomen. Bij hem betekent b.v. $N(k) \in \mathrm{N}$, dat van *elk* natuurlijk getal k de opvolger ook een natuurlijk getal is. Hier is niets tegen. Maar gevaarlijk wordt het nu om zonder voorzorgsmaatregelen bij het inductieve bewijs van b.v. $kl = lk$ te poneren als 'Induktionsvoraussetzung' $kl = lk$ om daar dan uit te deduceren $k(l+1) = (l+1)k$. Nu is niet in te zien, waarom men deze deductie niet eenvoudig kan verrichten door voor l te substitueren $l+1$.
In stelling 79 kan m.i. de toevoeging 'kommutativer' achterwege blijven.
Maar dit zijn kleinigheden, die niets afdoen aan de goede opzet van het werk.

P. G. J. Vredenduin

Nathan O. Niles, *Plane trigonometry*, 282 blz., 56 s., John Wiley and Son, New York, London, Sydney, 1959, 2nd ed., 1968.

Zoals het voorwoord zegt, een boek dat geschreven is om een modern tintje te geven aan de trigonometrie. Het moderne heeft de auteur gevonden in de behandeling van het functiebegrip alsmede de definitie van de goniometrische functies op basis van de vectoren in R_2, zonder evenwel die vectoren te noemen.
Wel is aan het eind een hoofdstuk: 'vectoren en complexe getallen' toegevoegd, voornamelijk bedoeld om wortels van complexe getallen te berekenen en om binomiaalvergelijkingen op te lossen.
De definitie van functie maakt het mogelijk om van de goniometrische functies van gerichte hoeken over te gaan op de dito functies van reële getallen. Ook de inversen van de goniometrische functies worden vrij uitvoerig bekeken. De opbouw van de theorie is steeds zo algemeen mogelijk gehouden.
Een viertal tafels besluit het boekwerk, dat waarschijnlijk bedoeld is voor firstyear students. De typografische verzorging is uitstekend, wat, gezien de hoge prijs, verwacht mocht worden.

J. J. Wouters

I. Drooyan, W. Wooton, *Elementary Algebra for college students*, tweede druk, John Wiley and Sons, London, 1968, 302 blz., 66/—.

Het boek is geschreven voor leerlingen die met algebra beginnen en het bevat ongeveer de middelbare schoolstof tot en met de vierkantsvergelijkingen echter zonder logaritmen. De behandeling is traditioneel. Opmerkelijk is, dat bij de definitie van de som van gehele getallen gebruik wordt gemaakt van de absolute waarde van een getal en dat de distributiviteit

van de vermenigvuldiging over de optelling eerst wordt behandeld nadat al ruimschoots met breuken en lineaire vergelijkingen is gewerkt. De behandeling van de wortels is dienstbaar gemaakt aan het oplossen van vergelijkingen: alleen vierkantswortels worden aan de orde gesteld. Tot slot worden kwadratische functies besproken zonder dat ons dierbare onderwerpen als kwadraatafsplitsen worden behandeld en is in het kort een aanduiding gegeven van reële en complexe getallen. Veel ophef maken de auteurs van het gebruik van een tweede kleur voor het aanduiden van formules, belangrijke voorbeelden enz. Van de opgaven vindt men van ongeveer de helft (de sommen met oneven nummers) de antwoorden achterin gegeven. Tezamen met een overzicht van gebruikte termen neemt dit een vierde deel van het boek in beslag. Nochtans eist het boek gezien de besproken hoeveelheid leerstof van één deel een zorgvuldige behandeling van de leerling.
Hoewel de behandeling van enige onderwerpen zoals het werken met machten en de introductie van eerstegraadsvergelijkingen zeer grondig geschiedt zal het boek in zijn geheel de leraar in Nederland toch weinig nieuws te bieden hebben.

R. Sattler

Ontvangen boeken

Dr. L. Lips, *Wiskunde voor economen*, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen 1969, 4e druk, 334 blz. f 18.25.
De vierde druk is nagenoeg gelijk aan de derde. Het eerder verschenen supplement: differentievergelijkingen is als hoofdstuk 16 opgenomen.

Ir. H. J. Legger en Ir. G. L. Ludolf, *Hogere wiskunde voor de technicus*, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen 1968, 2e druk, 419 blz. f 25.90.
Een bespreking van de eerste druk vindt men in de 38ste jaargang blz. 256. Belangrijke wijzigingen zijn niet aangebracht.

Werkschrift moderne wiskunde, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen 1968, 32 blz., f 1.60.
Dit werkschrift bevat verschillende soorten roosterpapier. Door de aangebrachte perforatie kunnen de vellen netjes verwijderd worden en bij het werk worden ingeleverd.

Dr. P. J. Gathier, *Sterrenkunde*, m.m.v. dr. J. Rekveld, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1969, 4e druk, 152 blz., f 8.20.
De aangebrachte veranderingen zijn beperkt gebleven tot enige verbeteringen en kleine aanvullingen.

Handleiding bij: *Moderne wiskunde*, deel 2 voor de brugklas, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1969, 96 blz., f 3.90.
Deze handleiding, tevens uitkomstenboek, is bestemd voor docenten van de brugklas.

Drs. Chr. Boermeester, B. Burger en dr. P. M. van Hiele, *Van A tot Z*, deel Ib, 2e druk, J. Muusses N.V., Purmerend 1969, 134 blz. f 6,15.
Deze tweede druk heeft geen wijzigingen ondergaan t.o.v. de eerste druk.

H. J. Pain, *The Physics of Vibrations and Waves*, John Wiley, Londen, 1969, 240 blz., 42/–.
Als natuurkunde boek is een bespreking in Euclides niet op zijn plaats. Men kan er echter wel praktische toepassingen in vinden, die in een wiskundeles gebruikt kunnen worden.

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Wiskunde V.W.O. I*, 2e druk, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 96 blz., f 6.50.
Deze tweede druk is gelijk aan de eerste.

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Praxis der Mathematik, X, 7–12 en XI, 1–6; juli 1968–juni 1969.

P. Lesky, Mengendiagramm beim ggT und kgV;
G. Gathmann, Zehnerlogarithmen mittels Rechenmaschine;
H. Töpfer, Matrizenmultiplikation;
J. E. Hofmann, Über ein arithmetisches Problem aus ungedruckten Leibnizschen Papieren.

W. Zirkel, Ringstruktur des Botsch-Boole-Modells;
P. Dallmann, Paul Mongré, der andere Hausdorff;
G. Lange, ln x und e^x;
W. Böhme, Abstrahieren oder veranschaulichen?

Chr. J. Scriba, Das Problem des Prinzen Ruprecht von der Pfalz;
D. Reuter, arctan-Funcktion mittels Integral;
H. Winter, Symmetrien des Kreisringes.

I. Paasche, Eine Laurentreihe der Mittelschule;
J. Kofler, Bogenlänge mittels Simpson-Regel;
L. Kienle, Plädoyer für mathematische Fachräume;
H. Töpfer, Begründung der Matrizenrechnung.

R. Linnemann, Zur Ableitung der Logarithmusfunktion;
G. Schostack, Metrische Duale in der Dreiecksgeometrie;
H. Schleuss, Buchstaben als Punktmengen;
H. Töpfer, Matrizen über Bigruppoiden.

H.-G. Bigalke, Zum Unendlichkeitsbegriff;
P. Klein, Die Inversion am Kreis in der Kunst;
S. Filippi, Das Horner-Schema und seine Erweiterungen;
J. E. Hofmann, 13. Mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach.

H. Siemon, Geometrische Übungen in einer Gruppentafel;
H. v. Majewski, Schiebung von Ergänzungsdreiecken bei Flächensatz-Beweisen;
W. Zirkel, Boole-Gruppe im Boole-Verband;
H. Töpfer, Klammerrechnen I.

P. Werner, Eine Menge zweiter Kategorie vom Mass 0;
H. Meissner, Zensuren nach Punkten;
J. E. Hofmann, Eine Einschiebekonstruktion Newtons;
H. Krieger, Bogengleiche Teile auf der parabolischen Spirale.

R. Lehnert, Das geschichtete Flächenornament;
M. Schindler, $a \pm (b \pm c)$ mengenalgebraisch;
W. Kimstedt, Parabel-Segmente;
E. M. Bruins, Irrationalität, Iteration, Induktion;
I. Paasche, Eine Ähnlichkeitsstransformation der Pascalmatrix.

E. Winkler, Merkwürdige Dreieckspunkte vektoriell;
Kl. Wigand, 3. Bundestagung zur Didaktik der Mathematik; IMUK-Seminar in Echternach;

H. Töpfer, Klammerrechnen II.

H. Töpfer, Mathematische Lehrgänge zwischen Gymnasium und Universität;
R. Rose, Bogengleiche Teile auf der Lemniskate;
E. Reiche, Zur Behandlung des Grenzwertes bei Funktionen.

P. Grabenstein, Das Lösen quadratischer Gleichungen als ebene Abbildung;
K-A Keil, Mathematische Unterrichtsprogramme;
Erster Internationaler Kongress der IMUK, 1969.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredendun, Julianaweg 25, Oosterbeek

224 Verdeel een vierkant door acht cirkelbogen in acht delen met gelijke oppervlakte. (B. Kootstra)

225 Men construeert de getalrijen

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & 3 & & 2 & & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 3 & & 2 & & 3 & 4 & 1 & \\ 1\ 5 & 4 & 3 & 5 & & 2 & & 5 & 3 & 4\ 5 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

enz.

volgens het volgende principe: begin met de rij 1 1; las op b.v. de 5e rij tussen elk paar getallen van de 4e rij, waarvan de som 5 bedraagt, het getal 5 in. In het algemeen op de ke rij tussen elk paar getallen van de $k-1$e rij, waarvan de som k bedraagt, het getal k. Wordt gevraagd hoeveel keer het getal 100 op de 100e rij voorkomt.

Oplossingen

222 Binnen vierkant $ABCD$ ligt een vast punt P; Q doorloopt de omtrek; driehoek PQR is gelijkzijdig. Wat is de meetkundige plaats van R?
Deze bestaat uit twee vierkanten, die we krijgen door $ABCD$ om P over 60° resp. −60° te roteren.

223 Een erfenis bestaande uit objecten ter waarde van $1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ gulden, waarin a_i natuurlijk en $a_i \leqq a_{i+1} \leqq 2a_i$, moet onder twee erfgenamen zo verdeeld worden, dat het verschil tussen de waarden van hun delen hoogstens 1 gulden bedraagt.
Onderstel de objecten hebben een waarde

1, 2, 3, 5, 8, 8, 14, 22, 23, 37, 70 gulden.

Geef A het object van 70 gulden en B dat van 37. Het verschil is nu volgens het gegeven hoogstens 37 gulden. Geef B het object van 23 gulden; het verschil is nu hoogstens 23. Geef degeen, die het minst heeft, i.c. B, het object van 22 gulden. Het verschil is nu hoogstens 22 gulden. Enz. Ten slotte is het verschil hoogstens 1 gulden.

Inhoud